Chapitre 1 — Corrigé

Domaine de fonctions

Calcul différentiel

1. Lire le domaine sur un graphe

Dans chaque cas, on lit directement sur le graphe les valeurs de x pour lesquelles la courbe existe, en portant attention aux points pleins (inclus), aux points creux (exclus) et aux asymptotes verticales (exclues).

(a) La courbe présente une asymptote verticale en $x = 1$ (aucune branche ne touche cette droite) et se prolonge indéfiniment de part et d'autre.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

(b) La courbe part d'un point plein en $x = -3$ et se prolonge vers la droite sans autre restriction.

Domaine : $[-3, +\infty[$

(c) La courbe n'est tracée qu'à gauche de l'asymptote verticale $x = 2$, vers laquelle elle diverge.

Domaine : $]-\infty, 2[$

(d) Pour $x \leq 1$ (extrémité en point creux), le segment de droite est défini ; pour $x \geq 1$ (point plein), la demi-droite horizontale prend le relais. Les deux morceaux couvrent ensemble toutes les valeurs de x.

Domaine : $\mathbb{R}$

(e) La première branche est définie pour $x \leq -2$ (point plein en $x = -2$) ; il n'y a aucune courbe entre $x = -2$ et $x = 1$; la demi-droite repart ensuite pour $x > 1$ (point creux en $x = 1$, donc exclu).

Domaine : $]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$

(f) La droite est tracée pour tous les x, sauf au point creux visible en $x = -1$, où la valeur est retirée du graphe (trou).

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

2. Fonctions polynomiales et rationnelles

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$
   Solution. Une fonction polynomiale est définie pour tout réel, quelle que soit la valeur de x.

   Domaine : $\mathbb{R}$

2. $f(x) = -8$
   Solution. Une fonction constante est définie pour tout réel.

   Domaine : $\mathbb{R}$

3. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+5}$
   Solution. Une fraction est définie tant que le dénominateur est non nul :

   $$2x + 5 = 0 \iff x = -\tfrac{5}{2}.$$

   Domaine : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 16}$
   Solution. On annule le dénominateur :

   $$x^2 - 16 = 0 \iff x^2 = 16 \iff x = \pm 4.$$

   Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$

5. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 2x - 15}$
   Solution. On factorise d'abord le dénominateur *sans simplifier avec le numérateur* :

   $$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3) = 0 \iff x = 5 \text{ ou } x = -3.$$

   Même si $(x+3)$ se simplifie ensuite avec le numérateur (ce qui donne $f(x) = \frac{1}{x-5}$ pour $x \neq -3$), la valeur $x = -3$ annule le dénominateur de l'expression *originale* et doit donc être exclue : la fonction possède un trou en $x = -3$.

   Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-3, 5\}$

6. $f(x) = \dfrac{7}{x^2 + 4}$
   Solution. Puisque $x^2 \geq 0$ pour tout x, on a $x^2 + 4 \geq 4 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais.

   Domaine : $\mathbb{R}$

7. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x}$
   Solution. On factorise le dénominateur :

   $$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0 \iff x = 0,\ x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

(Le numérateur se factorise en $(2x-1)(x-1)$, ce qui simplifie le facteur $(x-1)$ après coup, mais $x=1$ reste exclu du domaine puisqu'il annule le dénominateur d'origine.)

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$

Solution. On reconnaît un carré parfait : $x^2+2x+1 = (x+1)^2$, qui s'annule uniquement en $x=-1$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

3. Racines et logarithmes

1. $f(x) = \sqrt{2x+8}$
Solution. Il faut que la quantité sous la racine soit positive ou nulle :
$$2x + 8 \geq 0 \iff x \geq -4.$$
Domaine : $[-4, +\infty[$

2. $f(x) = \sqrt{12 - 3x}$
Solution.
$$12 - 3x \geq 0 \iff x \leq 4.$$
Domaine : $]-\infty, 4]$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$
Solution.
$$x^2 - 16 \geq 0 \iff x^2 \geq 16 \iff x \leq -4 \text{ ou } x \geq 4.$$
Domaine : $]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$

4. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
Solution.
$$16 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 16 \iff -4 \leq x \leq 4.$$
Domaine : $[-4, 4]$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$
Solution. Ici la racine est au dénominateur : elle doit donc être *strictement* positive (non seulement positive ou nulle, car on ne peut pas diviser par 0) :
$$5 - x > 0 \iff x < 5.$$
Domaine : $]-\infty, 5[$

6. $f(x) = \ln(4 - 2x)$
Solution. L'argument d'un logarithme doit être strictement positif :
$$4 - 2x > 0 \iff x < 2.$$
Domaine : $]-\infty, 2[$

7. $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 8)$
Solution. On factorise : $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$, une parabole ouverte vers le haut dont les racines sont 2 et 4. Elle est positive à l'*extérieur* des racines :
$$(x-2)(x-4) > 0 \iff x < 2 \text{ ou } x > 4.$$
Domaine : $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$

8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\ln(x-1)}$ (deux restrictions sur le même facteur)

Solution. Trois conditions à combiner :

— la racine : $x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$;

— l'argument du logarithme, strictement positif : $x-1>0 \iff x>1$;

— le dénominateur non nul : $\ln(x-1) \neq 0 \iff x-1 \neq 1 \iff x \neq 2$.

La condition $x>1$ entraîne déjà $x \geq -2$. Il reste donc $x>1$ et $x \neq 2$.

Domaine : $]1,2[\cup]2,+\infty[$

4. Tableaux de signes

1. $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+5)}$

Solution. Il faut $(x-2)(x+5) \geq 0$. C'est une parabole ouverte vers le haut, de racines -5 et 2, donc positive ou nulle à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Domaine : $]-\infty,-5] \cup [2,+\infty[$

2. $f(x) = \sqrt{(3-x)(x+1)(x-6)}$

Solution. Il faut $(3-x)(x+1)(x-6) \geq 0$. Les trois facteurs s'annulent en $x=-1,3,6$.

x	$-\infty$		-1		3		6		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$		$+$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est positif ou nul sur $]-\infty,-1]$ et sur $[3,6]$.

Domaine : $]-\infty,-1] \cup [3,6]$

3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-1}}$

Solution. Il faut $\dfrac{x+4}{x-1} \geq 0$, avec en plus $x \neq 1$ (dénominateur non nul). Racines/annulations : $x = -4$ (numérateur) et $x = 1$ (dénominateur, exclu).

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$+$	
Quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Le quotient est positif ou nul pour $x \leq -4$ ou $x > 1$ (on exclut $x = 1$).

Domaine : $]-\infty, -4] \cup]1, +\infty[$

4. $f(x) = \ln\left[(x+2)(x-5)\right]$

Solution. L'argument du logarithme doit être *strictement* positif : $(x+2)(x-5) > 0$. Parabole ouverte vers le haut, racines -2 et 5, positive à l'extérieur des racines.

Domaine : $]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)(x-6)}}$

Solution. La racine est au dénominateur : il faut $(x-1)(x+2)(x-6) > 0$, strictement (ni négatif, ni nul). Racines : $-2, 1, 6$.

x	$-\infty$		-2		1		6		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est strictement positif sur $]-2, 1[$ et sur $]6, +\infty[$.

Domaine : $]-2, 1[\cup]6, +\infty[$

6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x+1)(2-x)}{x-4}}$

Solution. Il faut $\dfrac{(x+1)(2-x)}{x-4} \geq 0$, avec $x \neq 4$. Le numérateur s'annule en $x = -1$ et $x = 2$; le dénominateur s'annule en $x = 4$ (exclu). Attention : le facteur $(2-x)$ change de signe à l'envers d'un facteur $(x-2)$ habituel.

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Quotient		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Le quotient est positif ou nul sur $]-\infty, -1]$ et sur $[2, 4[$ (on exclut $x = 4$).

Domaine : $]-\infty, -1] \cup [2, 4[$

5. Fonctions définies par parties

Pour une fonction définie par morceaux, le domaine de chaque morceau doit être compatible avec *la condition sur x qui l'accompagne* : on prend l'intersection entre le domaine naturel de l'expression et la condition, puis on réunit les morceaux.

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   Solution. Le morceau $2x+1$ (polynomial) est valide sur tout $x \leq 0$. Le morceau $\sqrt{x}$ exige $x \geq 0$, ce qui est automatiquement vrai sur sa condition $x > 0$. Les deux morceaux se rejoignent sans trou.

   Domaine : $\mathbb{R}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 9 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$

   Solution. Le premier morceau exige $x \neq -3$, déjà garanti par $x < -3$. Le second est polynomial, valide pour tout $x \geq -3$. Aucune valeur n'est perdue.

   Domaine : $\mathbb{R}$

3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+5} & \text{si } -5 \leq x < 2 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

   Solution. Le premier morceau exige $x \geq -5$, ce qui est compatible avec $-5 \leq x < 2$; il est donc valide sur tout cet intervalle. Le second morceau exige $x - 2 > 0$, c'est-à-dire $x > 2$, alors que sa condition est $x \geq 2$: au point $x = 2$, on obtiendrait $\ln(0)$, qui n'existe pas. Ce morceau n'est donc valide que pour $x > 2$, et $x = 2$ n'est couvert par *aucun* des deux morceaux.

   Domaine : $[-5, 2[\cup]2, +\infty[$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

   Solution. Le premier morceau exige $x \neq 0$, déjà garanti par $x < 0$. Le deuxième exige $-2 \leq x \leq 2$, compatible avec $0 \leq x \leq 2$. Le troisième est polynomial. Les trois morceaux couvrent ensemble tout $\mathbb{R}$ sans trou.

   Domaine : $\mathbb{R}$

5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } -1 < x < 3 \\ x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

   Solution. Le premier morceau exige $-x - 1 \geq 0$, soit $x \leq -1$, exactement la condition donnée. Le deuxième exige $x \neq 3$, déjà garanti par $-1 < x < 3$. Le troisième est polynomial. Tout $\mathbb{R}$ est couvert.

Domaine : $\mathbb{R}$

6. $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Solution. Le premier morceau exige $x + 1 > 0$, soit $x > -1$, compatible avec $-1 < x < 0$. Le second exige $x > 0$ (racine strictement positive au dénominateur), compatible avec sa condition. Mais *aucun morceau ne couvre* $x = 0$, ni les valeurs $x \leq -1$: ces valeurs sont exclues du domaine.

Domaine : $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

6. Problèmes défis

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+1}}$

Solution. Il faut $\dfrac{x^2-4}{x+1} \geq 0$ et $x \neq -1$. On factorise le numérateur : $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, de racines -2 et 2 ; le dénominateur s'annule en -1.

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Le quotient est positif ou nul sur $[-2, -1[$ et sur $[2, +\infty[$ (on exclut $x = -1$).

Domaine : $[-2, -1[\cup[2, +\infty[$

2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x-1)(x+4)} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(x)}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solution. *Premier morceau :* il faut $(x-1)(x+4) \geq 0$, soit $x \leq -4$ ou $x \geq 1$ (racines -4 et 1, parabole positive à l'extérieur). Combiné à la condition $x < 0$, seule la branche $x \leq -4$ reste (l'intervalle $-4 < x < 0$ rend le produit négatif, et $x \geq 1$ est incompatible avec $x < 0$).

Deuxième morceau : il faut $x > 0$ (domaine du logarithme ; au passage $x = 0$ est exclu même si la condition dit $x \geq 0$) et $x \neq 2$. Combiné à $x \geq 0$, cela donne $x > 0$ et $x \neq 2$.

Aucun morceau ne couvre l'intervalle $]-4, 0]$.

Domaine : $]-\infty,-4]\cup]0,2[\cup]2,+\infty[$

3. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

Solution. L'argument du logarithme doit être strictement positif : $\dfrac{x-3}{x+2}>0$, avec $x\neq -2$ automatiquement exclu par la condition de stricte positivité. Racines : 3 (numérateur) et -2 (dénominateur).

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Le quotient est strictement positif pour $x<-2$ ou $x>3$.

Domaine : $]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[$