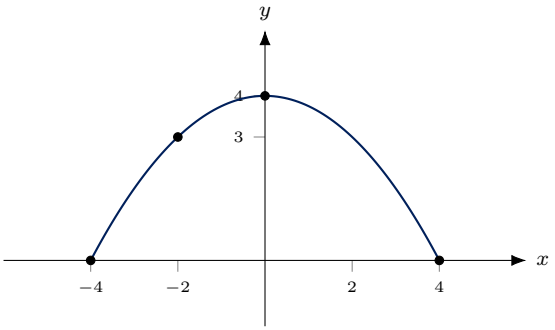
Chapitre 2 - Exercices 1

Évaluation des limites — graphique et algébrique

Calcul différentiel — Collège Sainte-Anne

1 Évaluation graphique

Exercice 1



Le graphe ci-dessus représente une fonction f de domaine $[-4, 4]$. D'après le graphe, déterminez :

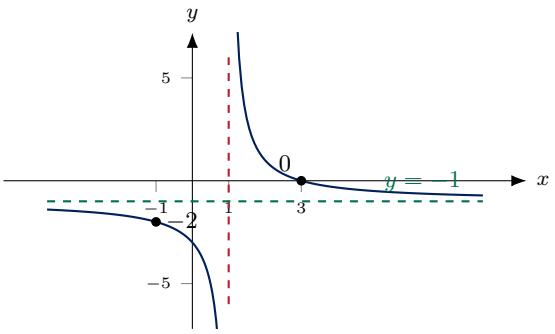
(a) $\lim_{x \to -2} f(x)$ et $f(-2)$

(b) $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $f(0)$

(c) $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ et $f(4)$; pourquoi n'étudie-t-on pas $\lim_{x \to 4^+} f(x)$?

(d) $\lim_{x \to -4} f(x)$ a-t-elle un sens des deux côtés ? Justifiez. Que vaut $f(-4)$?

Exercice 2



D'après le graphe, déterminez :

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

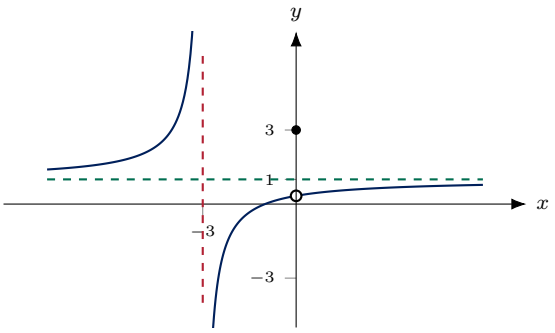
(b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ et $f(3)$

(c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ et $f(-1)$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

(e) Identifiez toutes les asymptotes de f.

Exercice 3



D'après le graphe, déterminez :

(a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

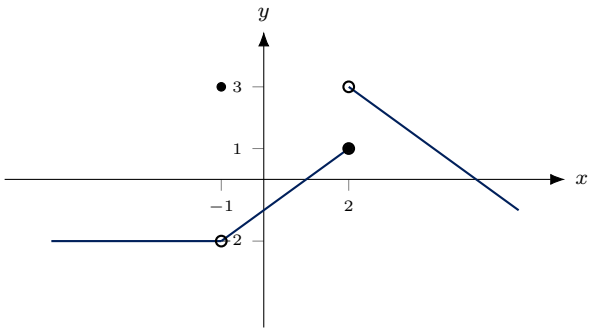
(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $f(0)$

(d) Identifiez toutes les asymptotes de f.

2 Évaluation graphique — fonctions définies par morceaux

Exercice 4

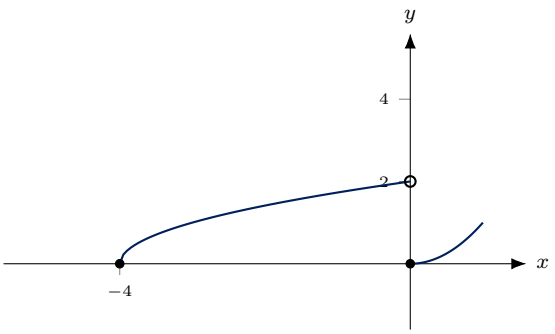


D'après le graphe, déterminez :

(a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, et $f(-1)$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, et $f(2)$

Exercice 5



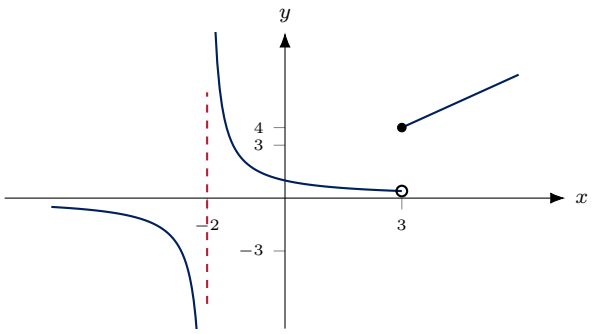
Le domaine de f est $[-4, +\infty[$. D'après le graphe, déterminez :

(a) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ et $f(-4)$; pourquoi $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$ n'a-t-elle pas de sens ?

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $f(0)$.

(c) Que peut-on conclure de la limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Exercice 6



D'après le graphe, déterminez :

(a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, et $f(3)$

(c) Que peut-on conclure de la limite $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

3 Évaluation algébrique

Rappel de méthode

Pour une fonction usuelle (polynôme, racine, fraction rationnelle, valeur absolue), on **substitue directement** $x = a$: le résultat de la substitution est la valeur de la limite.

Exercice 7

Calculez chacune des limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 1)$

(b) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{2x + 11}$

(c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-1}{x+2}$

(d) $\lim\limits_{x\to -2}|x + 5|$

Exercice 8

Calculez chacune des limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to -3}(x^2 + 2x - 1)$

(b) $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x - 5}$

(c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x+1}{x-1}$

Exercice 9

Calculez chacune des limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}|3 - 2x|$

(b) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt[3]{x - 4}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{x+4}$

3.1 Fonctions définies par morceaux

Rappel de méthode

Pour une limite unilatérale d'une fonction par morceaux, on repère **quel morceau s'applique** du côté étudié, puis on y substitue $x = a$. Pour la limite bilatérale, on compare ensuite les deux résultats.

Exercice 10

Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calculez $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, et $f(2)$. La fonction admet-elle une limite $x = 2$?

Exercice 11

Soit

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Calculez $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$, et $g(-1)$. La limite bilatérale existe-t-elle ?

Exercice 12

Soit

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 4 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

(a) Quel est le domaine de h ?

(b) Que dire de $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$? Peut-on l'étudier des deux côtés ?

(c) Calculez $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$. La limite bilatérale existe-t-elle ?

(d) Que dire de $\lim\limits_{x \to 5^+} h(x)$?

Exercice 13

Soit

$$p(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0,\ x \neq -2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Remarquez que le premier morceau exclut aussi $x = -2$, qui se trouve **à l'intérieur** de la région $x < 0$.

(a) Calculez $\lim\limits_{x \to -2^-} p(x)$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} p(x)$. Que remarquez-vous à propos de $p(-2)$?

(b) Calculez $\lim\limits_{x \to 0^-} p(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} p(x)$.