

Résumé du chapitre 1

Restrictions, tableaux de signes, fonctions par parties

Mohamed Noudha
Collège Sainte-Anne

Session Automne 2026

Table des matières

1	Trois sources de restriction	1
2	Exemples algébriques	3
3	Tableaux de signes	5
4	Fonctions définies par parties	6
5	Résumé	7

1. Trois sources de restriction

Définition

Le domaine de f , noté $\text{dom}(f)$, est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe :

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ est défini}\}$$

Idée clé

Trois opérations peuvent empêcher $f(x)$ d'exister :

1. **Division** : dénominateur $\neq 0$
2. **Racine paire** : radicande ≥ 0 (strict si au dénominateur)
3. **Logarithme** : argument > 0

S'il n'y a aucune de ces opérations (polynôme), alors $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Démarche à suivre

Méthode

Avant de calculer quoi que ce soit, il faut **identifier toutes les contraintes** présentes dans l'expression de $f(x)$:

1. Repérer **chaque** division, chaque racine paire, chaque logarithme dans l'expression, une contrainte peut en cacher une autre (ex. un logarithme au dénominateur, une racine à

l'intérieur d'un logarithme).

2. Écrire la condition mathématique correspondant à chaque contrainte, séparément.
3. Résoudre chaque condition individuellement.
4. S'il y a plus d'une contrainte, prendre l'**intersection** de tous les intervalles obtenus : c'est cette intersection qui donne le domaine.

Attention

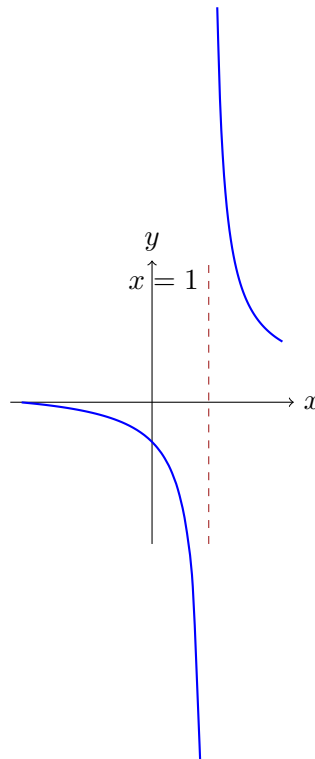
Il ne faut **jamais commencer à résoudre avant d'avoir repéré toutes les contraintes**. Une contrainte oubliée en cours de route (une racine ou un dénominateur caché plus loin dans l'expression) donne un domaine faux, même si le reste du calcul est exécuté correctement.

Rappel

La rédaction fait partie de la réponse. Il faut toujours présenter la **démarche complète** : les contraintes identifiées, les conditions écrites une à une, la résolution de chacune, puis l'intersection. Donner seulement l'ensemble final, sans démarche, ne démontre pas la compréhension et ne constitue pas une réponse complète.

Lire le domaine sur un graphe

- **Point plein** ($\bullet$) : valeur incluse
- **Point creux** ($\circ$) : valeur exclue
- **Flèche** : le graphe continue indéfiniment
- **Asymptote verticale** : valeur toujours exclue
- **Trou** : valeurs exclues



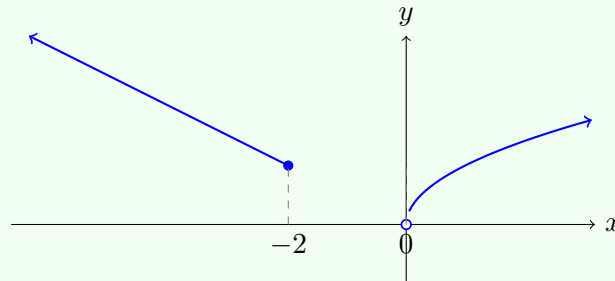
$$f(x) = \frac{1}{x-1} + 0,3, \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Attention

On ne regarde que l'axe des x . Une asymptote **horizontale** n'exclut *aucune* valeur de x : elle décrit le comportement de l'image, pas le domaine.

Exemple

Lire le domaine du graphe composé de deux morceaux ci-dessous.



Lecture, de gauche à droite :

- **Flèche** vers la gauche : le premier morceau continue indéfiniment $\Rightarrow$ aucune restriction de ce côté.
- **Point plein** en $x = -2$: cette valeur est *incluse*.
- **Trou** entre $x = -2$ et $x = 0$: rien n'est dessiné $\Rightarrow$ ces valeurs sont *exclues*.
- **Point creux** en $x = 0$: cette valeur est *exclue* (début du second morceau).
- **Flèche** vers la droite : le second morceau continue indéfiniment.

$$\text{dom}(f) =] - \infty, -2] \cup]0, \infty[$$

Idée clé

Pour lire un domaine sur un graphe fait de plusieurs morceaux, on balaie l'axe des x de gauche à droite et on note, à chaque changement (point plein, point creux, trou, flèche), si la portion correspondante est incluse ou exclue.

2. Exemples algébriques

Fonctions rationnelles

Méthode

Pour $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$: poser $q(x) = 0$, résoudre, exclure ces valeurs du domaine.

Exemple

Trouver le domaine de $f(x) = \frac{x+3}{x^2-2x-15}$.

Solution : $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3) \Rightarrow x = 5$ ou $x = -3$.

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 5\}$$

Attention

Piège classique : ne jamais simplifier avant de conclure ! Même si $(x+3)$ s'annule au numérateur et au dénominateur, $x = -3$ reste exclu du domaine de l'expression originale, car $f(-3)$ n'existe pas avant simplification.

Racines paires et logarithmes**Méthode**

- $f(x) = \sqrt{g(x)}$: exiger $g(x) \geq 0$ (strict si au dénominateur, car on ne peut pas diviser par 0)
- $f(x) = \ln(g(x))$: exiger $g(x) > 0$ (toujours strict)

Exemple

Trouver le domaine de $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$.

Solution : deux restrictions à combiner :

- Racine : $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
- Dénominateur : $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

On prend l'**intersection**, puis on retire le point exclu :

$$\text{dom}(f) = [-1, 2[\cup]2, \infty[$$

Idée clé

Avec plusieurs restrictions, on résout chacune séparément puis on prend l'**intersection** de tous les ensembles obtenus.

Combiner plusieurs contraintes : un exemple complet**Exemple**

Trouver le domaine de $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\ln(5-x)}$.

Étape 1 — Identifier toutes les contraintes. L'expression contient trois opérations restrictives :

- une racine carrée, sur $x+4$;
- un logarithme, sur $5-x$;

— une division, par $\ln(5 - x)$.

Étape 2 — Écrire une condition pour chaque contrainte.

$$\text{Racine : } x + 4 \geq 0$$

$$\text{Logarithme : } 5 - x > 0$$

$$\text{Dénominateur : } \ln(5 - x) \neq 0$$

Étape 3 — Résoudre chaque condition séparément.

$$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$$

$$5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$$

$$\ln(5 - x) \neq 0 \Rightarrow 5 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 4$$

Étape 4 — Intersecter les trois ensembles obtenus.

$$[-4, \infty[\cap]-\infty, 5[\cap (\mathbb{R} \setminus \{4\}) = [-4, 5[\setminus \{4\}$$

Conclusion.

$$\text{dom}(f) = [-4, 4[\cup]4, 5[$$

Attention

Si on avait oublié la troisième contrainte (le dénominateur $\ln(5 - x) \neq 0$), on aurait conclu à tort $\text{dom}(f) = [-4, 5[$, en incluant $x = 4$ où f n'est pourtant pas définie. **Identifier toutes les contraintes dès le départ**, avant de résoudre, évite ce genre d'erreur. C'est aussi pourquoi la démarche — et pas seulement le résultat final — doit apparaître clairement dans la rédaction.

3. Tableaux de signes

Idée clé

Quand l'expression sous une racine (ou un logarithme) est un **produit ou quotient** de plusieurs facteurs, le tableau de signes transforme un problème difficile en une tâche mécanique :

1. Factoriser complètement l'expression
2. Repérer les valeurs critiques (zéros du numérateur *et* du dénominateur)
3. Une ligne par facteur, une barre verticale par zéro
4. Combiner les signes (dernière ligne), colonne par colonne, pour lire le domaine

Attention

Un zéro du **dénominateur** est toujours exclu (barre double sur la ligne combinée), même si l'inégalité est large ($\geq$). Un zéro du **numérateur** peut être inclus si l'inégalité est large.

Exemple

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x+2)}{x-4}}$.

Valeurs critiques : $x = -2, 1$ (numérateur), $x = 4$ (dénominateur, exclu).

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Quotient	$-$	0	$+$	0	$+$

$$\text{dom}(f) = [-2, 1] \cup]4, \infty[$$

4. Fonctions définies par parties**Idée clé**

Le domaine total est l'union, pour chaque morceau f_k , de son intervalle I_k **intersecté** avec le domaine naturel de f_k :

$$\text{dom}(f) = \bigcup_{k=1}^n (I_k \cap \text{dom}(f_k))$$

Attention

Deux vérifications systématiques : (1) est-ce que $f_k(x)$ existe mathématiquement sur I_k ? et (2) I_k fait-il vraiment partie de la définition voulue ? Un « trou » entre deux morceaux n'appartient à aucun intervalle, donc pas au domaine.

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solution :

— Morceau 1 : $\frac{1}{x}$, domaine naturel $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\cap]-\infty, 0[\Rightarrow]-\infty, 0[$

— Morceau 2 : $\sqrt{x-2}$ exige $x \geq 2$, $\cap [2, \infty[\Rightarrow [2, \infty[$

$$\text{dom}(f) =]-\infty, 0[\cup [2, \infty[$$

Rappel

L'intervalle $[0, 2[$ n'est couvert par **aucun** morceau : il n'appartient pas au domaine, même si aucune restriction algébrique ne l'exclut directement.

5. Résumé

Idée clé

- **Graphe** : point plein = inclus, point creux/trou/asymptote verticale = exclu. L'asymptote horizontale n'exclut rien.
- **Trois restrictions** : division ($\neq 0$), racine paire (≥ 0 , ou > 0 au dénominateur), logarithme (> 0).
- **Identifier avant de résoudre** : repérer **toutes** les contraintes de l'expression avant de commencer les calculs.
- **Plusieurs restrictions** : résoudre chacune séparément, puis prendre l'**intersection** des intervalles obtenus.
- **Tableau de signes** : une ligne par facteur, barre double pour tout zéro d'un dénominateur.
- **Fonction par parties** : intersecter chaque morceau avec son intervalle, puis faire l'**union**. Le domaine n'est pas toujours $\mathbb{R}$.
- **Rédaction** : présenter la démarche complète (contraintes, conditions, résolution, intersection/union) — pas seulement le résultat final.