

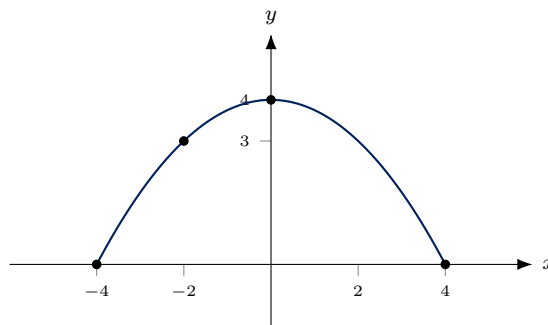
Chapitre 2, Exercices 1 - Solutions

Évaluation des limites — graphique et algébrique

Calcul différentiel — Collège Sainte-Anne

1 Évaluation graphique

Exercice 1



- (a) Le graphe montre un point plein en $(-2, 3)$:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3 = f(-2).$$

- (b) Le sommet de la courbe est un point plein en $(0, 4)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4 = f(0).$$

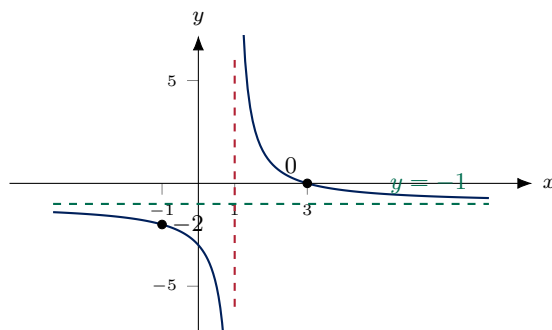
- (c) Le point plein à l'extrémité droite de la courbe est en $(4, 0)$:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0 = f(4).$$

On n'étudie pas $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ car le graphe (et donc le domaine de f) s'arrête en $x = 4$: il n'y a rien à droite de ce point.

- (d) Pour la même raison, le graphe commence en $x = -4$: il n'existe aucune portion de courbe à gauche de ce point, donc seule une approche par la droite a un sens. La limite bilatérale $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ **n'a donc pas de sens**. Le point plein à cette extrémité donne $f(-4) = 0$.

Exercice 2



Ici, la droite verticale pointillée (rouge) en $x = 1$ est une asymptote verticale, et la droite horizontale pointillée (verte) en $y = -1$ est une asymptote horizontale.

- (a) En s'approchant de l'asymptote verticale $x = 1$: par la gauche, la courbe plonge vers le bas sans jamais s'arrêter ; par la droite, elle monte sans jamais s'arrêter :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

- (b) Le graphe indique un point plein en $x = 3$, à hauteur 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 = f(3).$$

- (c) Le graphe indique un point plein en $x = -1$, à hauteur -2 :

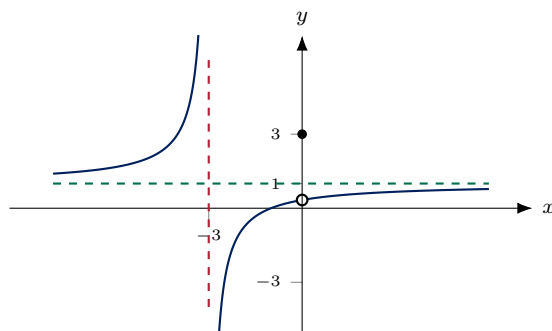
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2 = f(-1).$$

- (d) Vers la droite, la courbe se rapproche de plus en plus de la droite pointillée $y = -1$ sans jamais la toucher :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

- (e) Asymptotes : **verticale** $x = 1$ (pointillé rouge) et **horizontale** $y = -1$ (pointillé vert).

Exercice 3



Ici, la droite verticale pointillée (rouge) en $x = -3$ est une asymptote verticale, et la droite horizontale pointillée (verte) en $y = 1$ est une asymptote horizontale.

- (a) En s'approchant de l'asymptote verticale $x = -3$: par la gauche, la courbe monte sans jamais s'arrêter ; par la droite, elle plonge vers le bas sans jamais s'arrêter :

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty.$$

(b) Dans les deux directions, la courbe se rapproche de la droite pointillée $y = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

(c) En $x = 0$, le graphe présente un cercle vide un peu au-dessous de la droite $y = 1$ (à hauteur $\frac{1}{3}$), et un point plein isolé plus haut, à hauteur 3 :

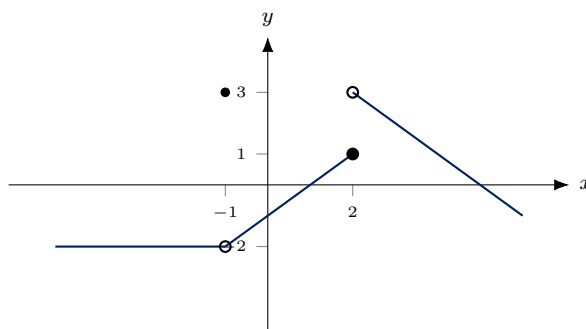
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}, \quad f(0) = 3.$$

Discontinuité *évitable* : la limite existe mais ne coïncide pas avec la valeur de la fonction.

(d) Asymptotes : **verticale** $x = -3$ et **horizontale** $y = 1$.

2 Évaluation graphique — fonctions définies par morceaux

Exercice 4



D'après le graphe, on distingue trois morceaux de courbe, avec deux points pleins isolés en $(-1, 3)$ et $(2, 1)$.

(a) En $x = -1$, le palier de gauche et la droite montante se rencontrent tous deux au même cercle vide, à hauteur -2 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2.$$

Les limites latérales étant égales, la limite bilatérale existe :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2.$$

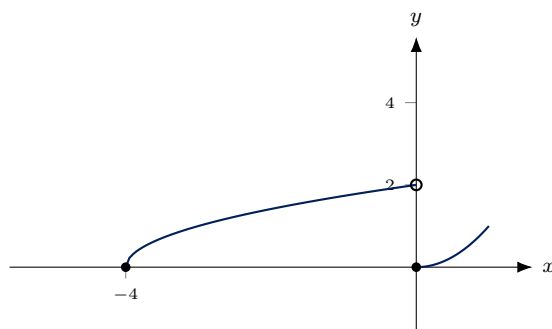
Or le point plein isolé donne $f(-1) = 3$. Comme $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$, il y a une discontinuité évitable en $x = -1$.

(b) En $x = 2$, les deux morceaux qui l'encadrent aboutissent à des cercles vides **différents** : la droite montante vers un cercle vide à hauteur 1, la droite descendante vers un cercle vide à hauteur 3 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3.$$

Les limites latérales étant différentes ($1 \neq 3$), la limite bilatérale n'existe pas. Le point plein isolé donne $f(2) = 1$ (qui coïncide ici avec la limite à gauche).

Exercice 5



Le domaine de f est $[-4, +\infty[$ (la courbe commence en $x = -4$).

- (a) Le point plein à l'extrémité gauche de la courbe est en $(-4, 0)$:

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 0 = f(-4).$$

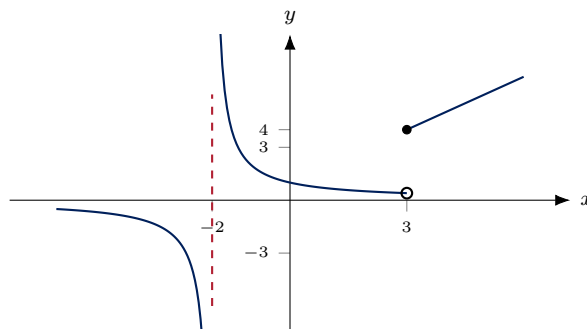
$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$ n'a pas de sens puisqu'il n'existe aucune portion de courbe à gauche de $x = -4$.

- (b) En $x = 0$, la branche de gauche se termine par un cercle vide à hauteur 2, tandis que la branche de droite démarre par un point plein à hauteur 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 0.$$

- (c) Les limites latérales étant différentes ($2 \neq 0$), $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **n'existe pas**.

Exercice 6



Ici, la droite verticale pointillée (rouge) en $x = -2$ est une asymptote verticale.

- (a) En s'approchant de l'asymptote verticale $x = -2$: par la gauche, la courbe plonge vers le bas sans jamais s'arrêter ; par la droite, elle monte sans jamais s'arrêter :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty.$$

- (b) En $x = 3$, la branche de gauche se termine par un cercle vide à hauteur 0,4 (un peu au-dessus de l'axe des x), tandis que le segment de droite démarre par un point plein à hauteur 4 :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0,4, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4, \quad f(3) = 4.$$

- (c) Les limites latérales étant différentes ($0,4 \neq 4$), $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ **n'existe pas**.

3 Évaluation algébrique

Rappel de méthode

Pour une fonction usuelle (polynôme, racine, fraction rationnelle, valeur absolue), on **substitue directement** $x = a$: le résultat de la substitution est la valeur de la limite.

Exercice 7

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 1) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2x + 11} = \sqrt{2(-1) + 11} = \sqrt{9} = 3$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{4 - 1}{4 + 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -2} |x + 5| = |-2 + 5| = |3| = 3$$

Exercice 8

$$(a) \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 2x - 1) = (-3)^2 + 2(-3) - 1 = 9 - 6 - 1 = 2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x - 5} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{2(-4) + 1}{-4 - 1} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}$$

Exercice 9

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} |3 - 2x| = |3 - 4| = |-1| = 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[3]{x - 4} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x + 4} = \frac{1 + 3}{1 + 4} = \frac{4}{5}$$

3.1 Fonctions définies par morceaux

Rappel de méthode

Pour une limite unilatérale d'une fonction par morceaux, on repère **quel morceau s'applique** du côté étudié, puis on y substitue $x = a$. Pour la limite bilatérale, on compare ensuite les deux résultats.

Exercice 10

Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Pour $x \rightarrow 2^-$, on utilise $x^2 - 1$; pour $x \rightarrow 2^+$, on utilise $3x - 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 - 1 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3(2) - 3 = 3.$$

Les limites latérales sont égales, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. De plus $f(2) = 3(2) - 3 = 3$ (le morceau $x \geq 2$ s'applique en $x = 2$). Comme $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, **oui**, f admet une limite (et est continue) en $x = 2$.

Exercice 11

Soit

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = 2(-1) + 5 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -(-1)^2 + 2 = -1 + 2 = 1.$$

De plus $g(-1) = 2(-1) + 5 = 3$ (le morceau $x \leq -1$ s'applique en $x = -1$). Les limites latérales sont différentes ($3 \neq 1$), donc la limite bilatérale $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ **n'existe pas**.

Exercice 12

Soit

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 4-x & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

(a) Le domaine de h est $[-3, 5]$.

(b) Comme -3 est l'extrémité gauche du domaine, seule une approche par la droite est possible :

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} h(x) = \sqrt{0} = 0.$$

On ne peut pas l'étudier des deux côtés, car h n'est pas définie pour $x < -3$.

(c) Pour $x \rightarrow 1^-$, on utilise $\sqrt{x+3}$; pour $x \rightarrow 1^+$, on utilise $4-x$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \sqrt{4} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 4 - 1 = 3.$$

Les limites latérales étant différentes ($2 \neq 3$), la limite bilatérale **n'existe pas**.

(d) Comme 5 est l'extrémité droite du domaine $[-3, 5]$, h n'est pas définie pour $x > 5$: $\lim_{x \rightarrow 5^+} h(x)$ **n'a pas de sens**.

Exercice 13

Soit

$$p(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0, x \neq -2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Le point $x = -2$ est intérieur à la région $x < 0$: le morceau $x + 3$ s'applique donc des deux côtés de -2 (l'exclusion du point lui-même n'affecte pas la limite) :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} p(x) = -2 + 3 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} p(x) = -2 + 3 = 1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -2} p(x) = 1$. Pourtant $p(-2)$ **n'est pas défini** (domaine exclut $x = -2$) : la limite existe mais la fonction n'y est simplement pas définie.

- (b) Pour $x \rightarrow 0^-$, on utilise $x + 3$; pour $x \rightarrow 0^+$, on utilise $x + 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} p(x) = 0 + 3 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = 0 + 1 = 1.$$

Les limites latérales étant différentes ($3 \neq 1$), $\lim_{x \rightarrow 0} p(x)$ n'existe pas.