

Résumé du chapitre 2

Calcul de limites et asymptotes

Mohamed Noudha
Collège Sainte-Anne

Session Automne 2026

Contents

1	La notion de limite	1
2	Lecture graphique	3
3	Calcul de limites : techniques et cas particuliers	4
4	Résumé	8

1. La notion de limite

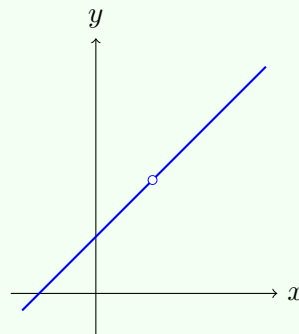
Idée intuitive

On s'intéresse au comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche d'une valeur a , **sans jamais l'atteindre** ($x \neq a$). Ce qui compte est le comportement de f *près* de a , pas nécessairement *en* a .

Exemple

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, non définie en $x = 1$. Plus x se rapproche de 1, plus $f(x)$ se rapproche de 2, des deux côtés :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \quad \text{même si } f(1) \text{ n'existe pas.}$$



Définition

On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si les valeurs de $f(x)$ se rapprochent d'aussi près que l'on veut de L lorsque x se rapproche de a (par la gauche *et* par la droite), avec $x \neq a$.

Attention

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ne dépend **pas** de la valeur $f(a)$, qui peut même ne pas exister.

Limites unilatérales**Définition**

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad : f(x) \rightarrow L \text{ lorsque } x \rightarrow a \text{ avec } x < a,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad : f(x) \rightarrow L \text{ lorsque } x \rightarrow a \text{ avec } x > a.$$

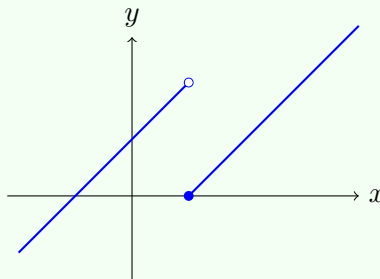
Théorème

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

Si les deux limites unilatérales existent mais diffèrent, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ **n'existe pas**.

Exemple

Soit $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$. Comme $2 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas. Notons que $f(1) = 0$ (point plein), une valeur distincte des deux limites.

Méthode sans graphe : pour $\lim_{x \rightarrow a^-}$, repérer le morceau valide pour $x < a$ et y substituer $x = a$; idem à droite pour $\lim_{x \rightarrow a^+}$.

Limite et domaine

Rappel

Pour qu'une limite ait un sens en a , il faut pouvoir approcher a par des points du **domaine** de f , différents de a :

- pour $\lim_{x \rightarrow a^-}$: il faut des points du domaine arbitrairement proches de a avec $x < a$;
- pour $\lim_{x \rightarrow a^+}$: il faut des points du domaine arbitrairement proches de a avec $x > a$;
- pour une limite bilatérale, il faut pouvoir approcher a des **deux** côtés.

Le fait que $a \in \text{dom}(f)$ n'est **ni nécessaire ni suffisant** : seule compte la possibilité d'approcher a du côté étudié.

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, $\text{dom}(f) = [0, +\infty[$.

- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ a un sens (4 est intérieur au domaine) et vaut 2.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'a de sens que *par la droite* (0 est une extrémité du domaine) : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ n'a même pas de sens comme question.
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ n'a **aucun sens** : -3 ne peut être approché par aucun point du domaine.

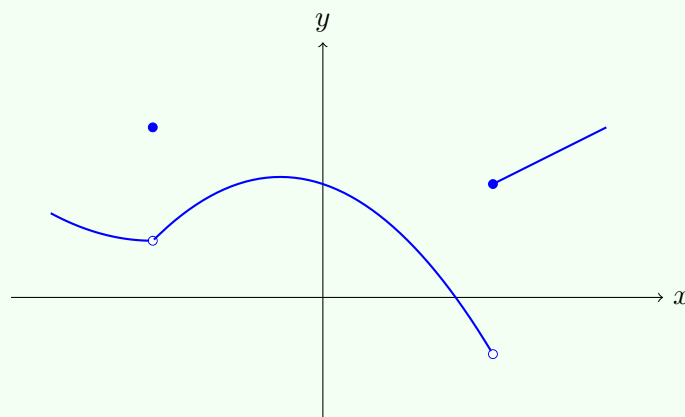
2. Lecture graphique

Méthode

Convention des cercles : un cercle plein $\bullet$ en (a, b) signifie $f(a) = b$; un cercle vide $\circ$ en (a, b) signifie que la courbe s'approche de (a, b) sans que ce point appartienne au graphe.

Pour $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$: suivre la courbe depuis la gauche et lire la hauteur visée (peu importe si le point est plein ou vide). Pour $f(a)$: chercher le point **plein** exactement en $x = a$.

Exemple



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= 1 & f(-3) &= 3 \quad (\text{limite} \neq \text{valeur}) \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 2 = f(0) & (\text{continuité}) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= -1, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 & \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ n'existe pas} \end{aligned}$$

Attention

Deux pièges classiques : (1) la limite existe mais diffère de $f(a)$; (2) les limites unilatérales sont différentes $\Rightarrow$ pas de limite bilatérale, peu importe la valeur de $f(a)$.

3. Calcul de limites : techniques et cas particuliers

Substitution directe et formes indéterminées

Méthode

Pour une fonction usuelle (polynôme, racine, fraction), on **substitue** $x = a$ **en premier**.

Résultat de la substitution	Conclusion
un nombre réel	c'est la limite
$k/0$ avec $k \neq 0$	étudier les signes (limite infinie)
$0/0$	forme indéterminée : transformer l'expression

Attention

$\frac{0}{0}$ n'est ni 0, ni 1, ni ∞ : c'est une forme indéterminée qui exige une simplification préalable.

Technique 1 — Factoriser

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \quad (x \neq 2).$$

Technique 2 — Rationaliser (multiplier par le conjugué)

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Technique 3 — Combiner des fractions

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2(x+2)} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(x+2)} = -\frac{1}{4}.$$

Cas particulier — Valeur absolue

Attention

Une limite avec valeur absolue **n'est pas automatiquement** une forme $0/0$ à factoriser : il faut d'abord réécrire $|\cdot|$ selon le signe.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} : \quad x > 0 \Rightarrow \frac{|x|}{x} = 1, \quad x < 0 \Rightarrow \frac{|x|}{x} = -1.$$

Comme $1 \neq -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Limites infinies

Définition

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ devient arbitrairement grand lorsque $x \rightarrow a$ (idem pour $-\infty$). $+\infty$ et $-\infty$ ne sont **pas des nombres réels** : c'est une description de comportement non borné.

Méthode

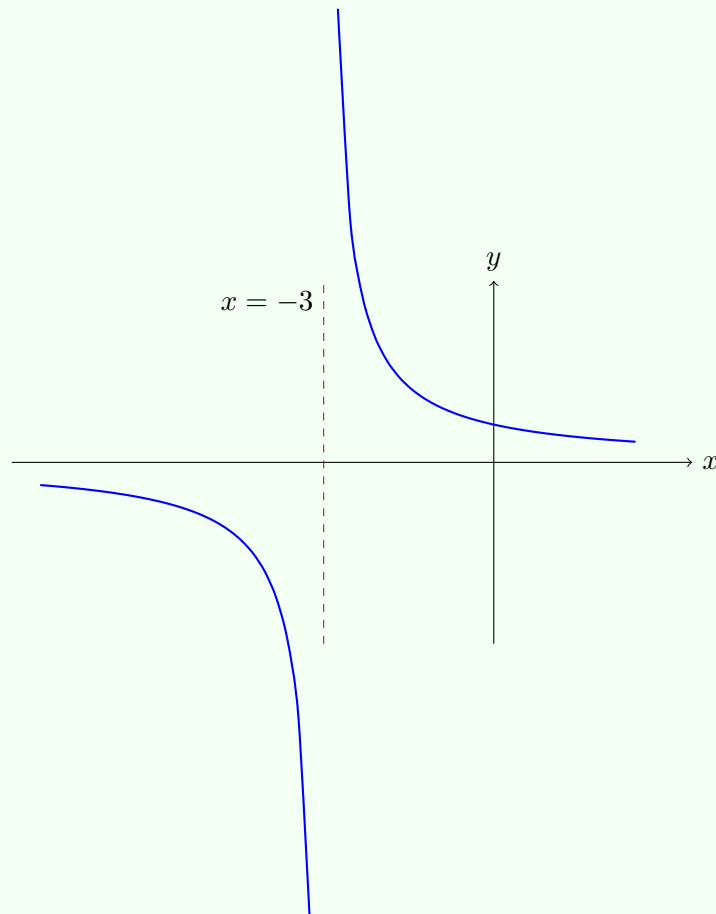
Règle du $k/0^\pm$: le résultat dépend du signe de k et du signe du dénominateur qui tend vers 0.

signe de k	dénominateur $\rightarrow$	résultat
$k > 0$	0^+	$+\infty$
$k > 0$	0^-	$-\infty$
$k < 0$	0^+	$-\infty$
$k < 0$	0^-	$+\infty$

Mnémonique : mêmes signes $\Rightarrow +\infty$; signes opposés $\Rightarrow -\infty$.

Exemple

$$f(x) = \frac{2}{x+3}, \text{ non définie en } x = -3.$$



Ici $k = 2 > 0$. Quand $x \rightarrow -3^-$, $x + 3 \rightarrow 0^-$ (signes opposés) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$. Quand $x \rightarrow -3^+$, $x + 3 \rightarrow 0^+$ (mêmes signes) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$. Les deux côtés explosent différemment $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ n'existe pas.

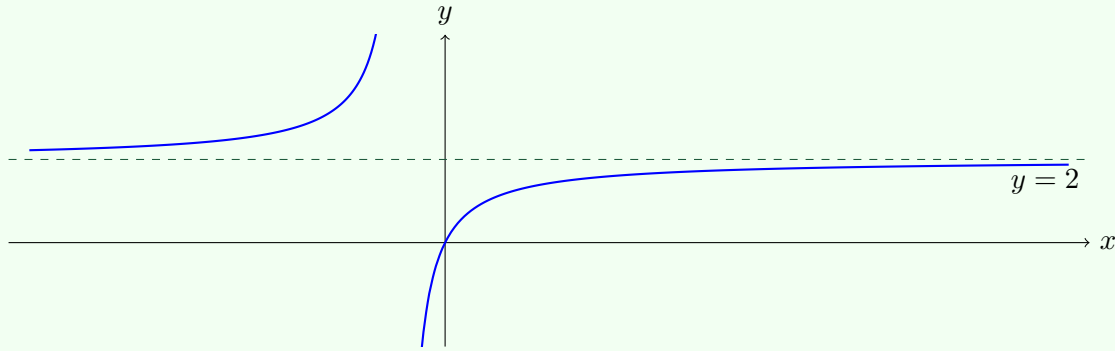
Limite à l'infini

Définition

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ signifie que $f(x)$ se rapproche d'aussi près que l'on veut de L lorsque x devient arbitrairement grand (idem pour $x \rightarrow -\infty$). Il n'y a pas de notion de « gauche/droite » : une seule direction dans chaque cas.

Exemple

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}.$$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$: la courbe se rapproche de la droite $y = 2$ (en vert) des deux côtés.

Asymptotes verticales et horizontales

Définition

Asymptote verticale : $x = a$ est une asymptote verticale si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.

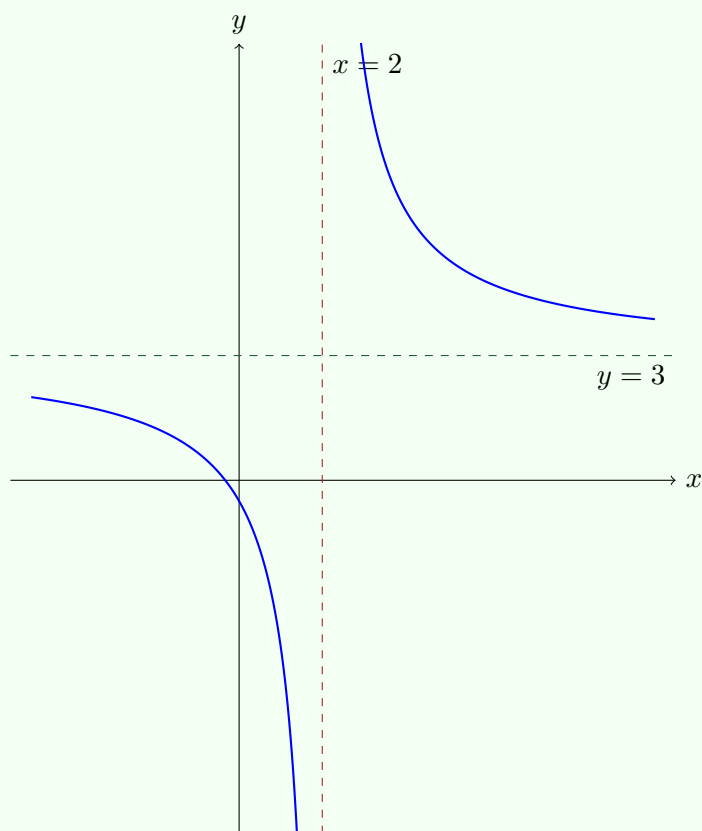
Asymptote horizontale : $y = L$ est une asymptote horizontale si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Attention

Une valeur exclue du domaine ne donne **pas automatiquement** une asymptote verticale (ex. un simple « trou » avec limite finie n'en est pas une). Une fonction peut avoir **deux** asymptotes horizontales distinctes (une à $+\infty$, une à $-\infty$), une seule, ou aucune — et contrairement à l'asymptote verticale, la courbe peut traverser son asymptote horizontale ailleurs.

Exemple

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}, \text{ dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$



Près de $x = 2$, le numérateur vaut $3(2) + 1 = 7 > 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 2$ est **une asymptote verticale** (en rouge). De plus $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ est **une asymptote horizontale** (en vert), la même des deux côtés.