Chapitre 3 - Exercices

Limites à l'infini — formes indéterminées et asymptotes

Mohamed Nouidha

Automne 2026

1 Fonctions usuelles et composition

Exercice 1

Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-1}{3-x}\right)$.

(a) Déterminer le domaine de f.

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to(1/2)^+} f(x)$. Que peut-on en conclure sur la droite $x = \frac{1}{2}$?

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$. Que peut-on en conclure sur la droite $x = 3$?

Exercice 2

Soit $g(x) = e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$.

(a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

(b) En déduire l'équation d'une éventuelle asymptote horizontale.

Exercice 3

Soit $h(x) = \sqrt{\dfrac{3x^2+2}{x^2-4}}$.

(a) Déterminer le domaine de h (attention : il faut que l'expression sous la racine soit *définie et positive ou nulle*).

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-} h(x)$. Qu'observe-t-on aux droites $x = 2$ et $x = -2$?

Exercice 4

Soit $k(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

(a) Déterminer le domaine de k.

(b) Calculer $\lim_{x\to 0} k(x)$ (les deux côtés donnent-ils la même chose ?).

(c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} k(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} k(x)$.

Exercice 5

Soit $m(x) = \sqrt{\ln(x)}$.

(a) Déterminer le domaine de m.

(b) Calculer $\lim_{x\to 1^+} m(x)$.

(c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} m(x)$.

(d) La droite $x = 1$ est-elle une asymptote verticale de m ? Justifier soigneusement.

2 Comparaison des croissances à l'infini

Exercice 6

Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$.

Exercice 7

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(x^3 - e^x\right)$.

Astuce

Mettez en évidence le terme qui domine (ici e^x) en factorisant : $x^3 - e^x = e^x\left(\dfrac{x^3}{e^x} - 1\right)$.

Exercice 8

Calculer $\lim_{x\to+\infty} (\ln(x) - x)$.

Exercice 9

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \ln(x)\right)$.

Exercice 10

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + \ln(x)}{2x^3 - e^x}$.

3 Formes indéterminées — par factorisation

Rappel

Une limite de la forme $\frac{0}{0}$ pour un quotient de polynômes signifie que le numérateur *et* le dénominateur s'annulent au même point a : ils sont donc tous les deux divisibles par $(x-a)$. On factorise, on simplifie, puis on évalue.

Exercice 11

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$$

Exercice 12

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

Exercice 13

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$$

Exercice 14

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$$

Exercice 15

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x-2}$$

Exercice 16

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^2-x-6}$$

4 Formes indéterminées — par rationalisation

Rappel

En présence d'une racine carrée, on multiplie par la **quantité conjuguée** (numérateur *et* dénominateur) pour faire disparaître la racine, en utilisant $(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A-B$.

Exercice 17

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Exercice 18

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

Exercice 19

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

Exercice 20

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

Exercice 21

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

Exercice 22

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

Attention

Ici $x \to -\infty$: rappelez-vous que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ lorsque $x < 0$. Ne remplacez jamais $\sqrt{x^2}$ par x sans réfléchir au signe.

5 Asymptotes verticales et horizontales

Exercice 23

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$.

(a) Factoriser le numérateur et le dénominateur.

(b) Le point $x = 2$ donne-t-il une asymptote verticale, ou plutôt un « trou » dans le graphe (discontinuité éliminable) ? Justifier en calculant $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

(c) Montrer que $x = -2$ est une véritable asymptote verticale.

(d) Déterminer l'asymptote horizontale de f.

Exercice 24

Soit $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

(a) Calculer $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} g(x)$.

(b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

(c) g possède-t-elle une asymptote horizontale ? Justifier.

Exercice 25

Soit $h(x) = e^{\frac{2}{x-3}}$.

(a) Déterminer le domaine de h.

(b) Calculer $\lim_{x\to 3^+} h(x)$ et $\lim_{x\to 3^-} h(x)$. Les deux côtés se comportent-ils de la même façon ?

(c) Déterminer l'asymptote horizontale de h.

Exercice 26

Soit $k(x) = \ln\big((x+1)^2\big)$.

(a) Déterminer le domaine de k.

(b) Calculer $\lim_{x\to -1} k(x)$ (les deux côtés).

(c) k possède-t-elle une asymptote horizontale ? Justifier.

Exercice 27

Soit $m(x) = 3 - 2e^{-x^2}$.

(a) Déterminer le domaine de m.

(b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} m(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} m(x)$.

(c) m possède-t-elle une asymptote verticale ? une asymptote horizontale ? Justifier chaque réponse.

6 Problèmes de synthèse

À propos de cette section

Ces problèmes combinent plusieurs techniques vues plus haut (domaine, composition, factorisation, rationalisation, comparaison des croissances). Prenez le temps de bien identifier *quelle* technique s'applique à *quelle* étape.

Exercice 28

Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\right)$.

(a) Déterminer le domaine de f (indice : étudier le signe de $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ à l'aide d'un tableau de signes).

(b) Étudier le comportement de f à chacune des bornes de son domaine ($x \to -2$, $x \to -1$, $x \to 1$, $x \to 2$, en précisant bien le côté). Quelles droites sont des asymptotes verticales ?

(c) Déterminer l'asymptote horizontale de f.

Exercice 29

Soit $g(x) = \sqrt{x^2+3x} - x$.

(a) Déterminer le domaine de g.

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ par rationalisation. En déduire une asymptote horizontale (à droite).

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ (attention au signe de x). g a-t-elle une asymptote horizontale à gauche ?

Exercice 30

Soit $h(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$.

(a) Simplifier l'expression $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ par factorisation (pour $x \neq 2$).

(b) En déduire le domaine de h.

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to(-2)^+} h(x)$. Que peut-on en conclure ?

(d) Calculer $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$. Le point $x=2$ donne-t-il une asymptote verticale, ou un simple trou ?

(e) Y a-t-il une asymptote horizontale ?

Exercice 31

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - \sqrt{e^{2x}+x}\right)$.

Piste

Rationalisez en posant $A = e^x$ et $B = \sqrt{e^{2x}+x}$, puis utilisez la comparaison des croissances sur le résultat obtenu.

Exercice 32

Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^5}{x}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^{x/2}}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{(\ln x)^{10}}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-2x}$

(rappel : si $a > b > 0$, alors $e^{bx} \ll e^{ax}$)

(e) $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{2x} - e^{x}\right)$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{x} - e^{3x}\right)$

(g) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} + x}{e^{3x} - 1}$

(rappel : $x^p(\ln x)^q \ll e^{ax}$ pour tous $p, q, a > 0$)

(h) $\lim_{x\to+\infty} \left(x^4(\ln x)^2 - e^{x}\right)$

(i) $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{2x} - x^{10}\ln(x)\right)$

(j) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3e^x - e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

(k) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\,e^{x} - e^{2x}\right)$

(l) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\ln(x) + e^x}{e^{2x} - x}$

(m) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + \ln(x)}{x^5 + e^{x/2}}$

(n) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x) + x^{100}}{e^x - x^{100}}$

Attention

La hiérarchie $\ln(x) \ll x^p \ll e^x$ n'est valable qu'en $+\infty$. Quand $x \to -\infty$, $\ln(x)$ n'est pas défini et $e^x \to 0$: l'exponentielle devient **négligeable** plutôt que dominante!

Attention : le cas $x \to -\infty$

(o) $\lim_{x\to-\infty} \left(x^4 - e^{x}\right)$

(p) $\lim_{x\to-\infty} \left(e^{x} - x^5\right)$