Chapitre 3 - Exercices

Limites à l'infini — Corrigé détaillé

Mohamed Nouidha

Automne 2026

1 Fonctions usuelles et composition

Exercice 1

a) On résout $\dfrac{2x-1}{3-x} > 0$. Racines : $x = \frac{1}{2}$ (numérateur) et $x = 3$ (dénominateur). Le tableau de signes donne une expression positive sur $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. Donc $\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

b) Quand $x \to (1/2)^+$: numérateur $\to 0^+$, dénominateur $\to 2{,}5 > 0$, donc l'intérieur $\to 0^+$ et $\ln(0^+) = -\infty$. La droite $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale (à droite).

c) Quand $x \to 3^-$: numérateur $\to 5$, dénominateur $\to 0^+$, donc l'intérieur $\to +\infty$ et $\ln(+\infty) = +\infty$. La droite $x = 3$ est une asymptote verticale (à gauche).

Exercice 2

a) Numérateur et dénominateur de degré 2, coefficients dominants 1 et 1, donc $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \to 1$ quand $x \to \pm\infty$ (le résultat est le même des deux côtés car l'expression ne dépend que de x^2). Donc $g(x) \to e^1 = e$ dans les deux cas.

b) La droite $y = e$ est une asymptote horizontale (à gauche *et* à droite).

Exercice 3

a) Le numérateur $3x^2+2$ est toujours strictement positif; l'expression est donc du signe du dénominateur. Il faut $x^2 - 4 > 0$ (strictement, sinon l'expression n'est pas définie), soit $x < -2$ ou $x > 2$. $\mathrm{Dom}(h) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

b) Degrés égaux, coefficients dominants 3 et 1 : l'intérieur $\to 3$, donc $h(x) \to \sqrt{3}$.

c) Quand $x \to 2^+$: numérateur $\to 14$, dénominateur $\to 0^+$, intérieur $\to +\infty$, $\sqrt{\cdot} \to +\infty$. Quand $x \to (-2)^-$: numérateur $\to 14$, dénominateur $\to 0^+$ également, même conclusion. Les droites $x = 2$ et $x = -2$ sont toutes deux des asymptotes verticales.

Exercice 4

a) $\mathrm{Dom}(k) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Comme $\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$ des **deux** côtés de 0 (car $x^2 > 0$ peu importe le signe de x), l'intérieur $1 + \dfrac{1}{x^2} \to +\infty$

des deux côtés, donc $k(x) \to +\infty$ des deux côtés : $\lim_{x\to 0} k(x) = +\infty$ (asymptote verticale en $x = 0$).

c) Quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{1}{x^2} \to 0$, donc l'intérieur $\to 1$ et $k(x) \to \ln(1) = 0$ dans les deux cas (asymptote horizontale $y = 0$).

Exercice 5

a) Il faut $\ln(x) \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 1$. $\mathrm{Dom}(m) = [1, +\infty)$.

b) Quand $x \to 1^+$, $\ln(x) \to 0^+$, donc $m(x) = \sqrt{\ln(x)} \to \sqrt{0} = 0$.

c) Quand $x \to +\infty$, $\ln(x) \to +\infty$, donc $m(x) \to +\infty$.

d) **Non.** La limite en $x = 1^+$ est **finie** (elle vaut 0), donc la fonction n'explose pas près de $x = 1$: c'est simplement l'extrémité gauche du domaine, pas une asymptote verticale. Une asymptote verticale exige que la limite soit infinie.

2 Comparaison des croissances à l'infini

Exercice 6

$x^2 e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x} \to 0$ car $x^p \ll e^x$ pour tout $p > 0$.

Exercice 7

$x^3 - e^x = e^x\left(\dfrac{x^3}{e^x} - 1\right)$. Or $\dfrac{x^3}{e^x} \to 0$, donc la parenthèse $\to (0 - 1) = -1$. Comme $e^x \to +\infty$, le produit tend vers $(+\infty) \times (-1) = -\infty$.

Exercice 8

$\ln(x) - x = x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right)$. Or $\dfrac{\ln(x)}{x} \to 0$, donc la parenthèse $\to -1$. Comme $x \to +\infty$, le produit tend vers $-\infty$.

Exercice 9

$\sqrt{x} - \ln(x) = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$. Or $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln x}{x^{1/2}} \to 0$ (car $\ln(x) \ll x^p$ pour tout $p > 0$, ici $p = \frac{1}{2}$), donc la parenthèse $\to 1$. Comme $\sqrt{x} \to +\infty$, le produit tend vers $+\infty$.

Exercice 10

On divise le numérateur et le dénominateur par e^x (le terme qui domine tout) :

$$\frac{x^3 + \ln(x)}{2x^3 - e^x} = \frac{\dfrac{x^3}{e^x} + \dfrac{\ln(x)}{e^x}}{\dfrac{2x^3}{e^x} - 1}.$$

Au numérateur, $\dfrac{x^3}{e^x} \to 0$ et $\dfrac{\ln x}{e^x} \to 0$, donc le numérateur $\to 0$. Au dénominateur, $\dfrac{2x^3}{e^x} \to 0$, donc le dénominateur $\to -1$. La limite vaut $\dfrac{0}{-1} = 0$.

3 Formes indéterminées par factorisation

Exercice 11

$x^2-4=(x-2)(x+2)$ et $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Donc $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+2}{x-3}$ pour $x\neq 2$. En $x=2$: $\dfrac{4}{-1}=-4$.

Exercice 12

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ et $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Donc $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ pour $x\neq -1$. En $x=-1$: $\dfrac{1+1+1}{-2}=-\dfrac{3}{2}$.

Exercice 13

$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$ et $x^2-9=(x-3)(x+3)$. Donc la fraction se simplifie en $\dfrac{x^2+3x+9}{x+3}$. En $x=3$: $\dfrac{9+9+9}{6}=\dfrac{27}{6}=\dfrac{9}{2}$.

Exercice 14

$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ et $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. La fraction devient $\dfrac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$. En $x=1$: $\dfrac{(2)(2)}{3}=\dfrac{4}{3}$.

Exercice 15

$x^5-32=x^5-2^5=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$. La fraction se simplifie en $x^4+2x^3+4x^2+8x+16$. En $x=2$: $16+16+16+16+16=80$.

Exercice 16

Au numérateur, $x=-2$ est racine double : $x^3+3x^2-4=(x+2)^2(x-1)$ (par division synthétique). Au dénominateur, $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$. Après simplification (un seul facteur $(x+2)$ s'annule) :

$$\frac{x^3+3x^2-4}{x^2-x-6}=\frac{(x+2)(x-1)}{x-3}.$$

En $x=-2$: $\dfrac{(0)(-3)}{-5}=0$.

4 Formes indéterminées par rationalisation

Exercice 17

On multiplie par le conjugué $\sqrt{1+x}+1$:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

Exercice 18

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \xrightarrow[x\to 4]{} \frac{1}{4}.$$

Exercice 19

$$\frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \frac{(x+9)-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}.$$

Exercice 20

$$\sqrt{x^2+1}-x = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

puisque le dénominateur tend vers $+\infty$.

Exercice 21

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x} = \frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}.$$

On divise numérateur et dénominateur par $x>0$:

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{2}{1+1} = 1.$$

Exercice 22

On multiplie par le conjugué $\sqrt{x^2+1}-x$:

$$\sqrt{x^2+1}+x = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

Quand $x\to-\infty$: $\sqrt{x^2+1}\to+\infty$ et $-x\to+\infty$ (car x est négatif), donc le dénominateur $\to+\infty$ et la limite vaut 0.

5 Asymptotes verticales et horizontales

Exercice 23

a) $2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2)$ et $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

b) Pour $x \neq 2$: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$. Donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{5}{4}$, une valeur **finie** : $x = 2$ n'est pas une asymptote verticale, mais un **trou** dans le graphe (discontinuité éliminable), car le facteur $(x-2)$ s'annule à la fois au numérateur et au dénominateur.

c) En $x = -2$: le numérateur de la forme simplifiée $2x+1$ vaut $-3 \neq 0$, alors que $x + 2 \to 0$. La limite est donc infinie : $x = -2$ est une véritable asymptote verticale.

d) Avec la forme simplifiée $\dfrac{2x+1}{x+2}$, degrés égaux, rapport des coefficients dominants $\dfrac{2}{1} = 2$: asymptote horizontale $y = 2$.

Exercice 24

a) En $x = 1$, le numérateur vaut $2 \neq 0$. Quand $x \to 1^+$, $x - 1 \to 0^+$, donc $g(x) \to +\infty$. Quand $x \to 1^-$, $x - 1 \to 0^-$, donc $g(x) \to -\infty$. (Asymptote verticale $x = 1$, avec des comportements opposés de chaque côté.)

b) Le degré du numérateur (2) dépasse celui du dénominateur (1) : $g(x) \sim x$ à l'infini, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

c) **Non**, g n'a pas d'asymptote horizontale : le degré du numérateur dépasse celui du dénominateur, donc $g(x) \to \pm\infty$ plutôt que vers une valeur finie.

Exercice 25

a) $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

b) Quand $x \to 3^+$: $\dfrac{2}{x-3} \to +\infty$, donc $h(x) = e^{2/(x-3)} \to +\infty$. Quand $x \to 3^-$: $\dfrac{2}{x-3} \to -\infty$, donc $h(x) \to e^{-\infty} = 0$. Les deux côtés sont **très différents** : $x = 3$ est une asymptote verticale seulement à **droite** (à gauche, h tend simplement vers 0).

c) Quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{2}{x-3} \to 0$, donc $h(x) \to e^0 = 1$: asymptote horizontale $y = 1$ des deux côtés.

Exercice 26

a) $(x+1)^2 > 0$ pour tout $x \neq -1$, donc $\mathrm{Dom}(k) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Quand $x \to -1$ (des deux côtés), $(x+1)^2 \to 0^+$, donc $k(x) \to \ln(0^+) = -\infty$ des deux côtés : $x = -1$ est une asymptote verticale (à gauche *et* à droite).

c) **Non.** Quand $x \to \pm\infty$, $(x+1)^2 \to +\infty$, donc $k(x) \to +\infty$ (même si c'est lent) : pas d'asymptote horizontale.

Exercice 27

a) $\mathrm{Dom}(m) = \mathbb{R}$ (l'exponentielle est définie partout).

b) Quand $x \to \pm\infty$, $x^2 \to +\infty$ donc $e^{-x^2} \to 0$, donc $m(x) \to 3 - 0 = 3$ dans les deux cas.

c) **Pas d'asymptote verticale** : le domaine est $\mathbb{R}$ tout entier, il n'y a aucun point où m pourrait « exploser ». **Asymptote horizontale** : $y = 3$, des deux côtés (car la limite est 3 en $+\infty$ et en $-\infty$).

6 Problèmes de synthèse

Exercice 28

a) On étudie le signe de $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$. Racines du numérateur : $x = \pm 1$; racines du dénominateur : $x = \pm 2$ (exclues). Le tableau de signes donne :

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty).$$

b) **En** $x = -2$ (on approche par la gauche, seul côté dans le domaine) : numérateur $\to 3$, dénominateur $\to 0^+$, intérieur $\to +\infty$, donc $f(x) \to \ln(+\infty) = +\infty$: asymptote verticale à gauche de -2.
En $x = -1$ (on approche par la droite) : numérateur $\to 0^-$ (pour x légèrement supérieur à -1), dénominateur $\to -3$, intérieur $\to 0^+$, donc $f(x) \to \ln(0^+) = -\infty$: asymptote verticale à droite de -1.
En $x = 1$ (on approche par la gauche) : numérateur $\to 0^-$, dénominateur $\to -3$, intérieur $\to 0^+$, donc $f(x) \to -\infty$: asymptote verticale à gauche de 1.
En $x = 2$ (on approche par la droite) : numérateur $\to 3$, dénominateur $\to 0^+$, intérieur $\to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$: asymptote verticale à droite de 2.
Il y a donc **quatre** asymptotes verticales, chacune valable d'un seul côté : $x = -2$ (à g.), $x = -1$ (à dr.), $x = 1$ (à g.), $x = 2$ (à dr.).

c) Quand $x \to \pm\infty$, degrés égaux (num. et dénom. de degré 2, coefficients 1 et 1), donc l'intérieur $\to 1$ et $f(x) \to \ln(1) = 0$: asymptote horizontale $y = 0$.

Exercice 29

a) Il faut $x^2 + 3x \geq 0$, soit $x(x+3) \geq 0$, soit $x \leq -3$ ou $x \geq 0$. $\mathrm{Dom}(g) = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.

b) En rationalisant :

$$\sqrt{x^2+3x} - x = \frac{(x^2+3x) - x^2}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x}.$$

On divise par $x > 0$:

$$= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

Asymptote horizontale $y = \dfrac{3}{2}$ à droite.

c) Pour $x \to -\infty$, on écrit $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)} = |x|\sqrt{1+\frac{3}{x}} = -x\sqrt{1+\frac{3}{x}}$ (car $x < 0$). Donc

$$g(x) = -x\sqrt{1+\tfrac{3}{x}} - x = -x\left(\sqrt{1+\tfrac{3}{x}} + 1\right).$$

Quand $x \to -\infty$: $-x \to +\infty$ et $\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1 \to 2$, donc $g(x) \to +\infty$. **Il n'y a pas** d'asymptote horizontale à gauche.

Exercice 30

a) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, donc $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$ pour $x \neq 2$.

b) Il faut $x + 2 > 0$ (pour que le ln soit défini) **et** $x \neq 2$ (point exclu dès le départ). Donc $\mathrm{Dom}(h) = (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

c) Quand $x \to (-2)^+$: $x + 2 \to 0^+$, donc $h(x) \to \ln(0^+) = -\infty$: asymptote verticale (à droite) en $x = -2$.

d) Quand $x \to 2$ (peu importe le côté, les deux sont dans le domaine autour de 2) : $x + 2 \to 4$, valeur **finie**, donc $h(x) \to \ln(4)$. Ce n'est **pas** une asymptote verticale : c'est un simple trou dans le graphe en $x = 2$ (là où l'expression originale était non définie).

e) Quand $x \to +\infty$, $x + 2 \to +\infty$, donc $h(x) \to +\infty$: **pas** d'asymptote horizontale.

Exercice 31

On pose $A = e^x$ et $B = \sqrt{e^{2x} + x}$ (avec $A^2 = e^{2x}$), et on rationalise :

$$e^x - \sqrt{e^{2x}+x} = A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B} = \frac{e^{2x} - (e^{2x} + x)}{e^x + \sqrt{e^{2x}+x}} = \frac{-x}{e^x + \sqrt{e^{2x}+x}}.$$

On divise numérateur et dénominateur par e^x :

$$= \frac{-x/e^x}{1 + \sqrt{1 + x\,e^{-2x}}}.$$

Or $\dfrac{x}{e^x} \to 0$ (croissance comparée) et $x\,e^{-2x} \to 0$, donc le dénominateur $\to 1 + \sqrt{1+0} = 2$ et le numérateur $\to 0$. La limite vaut $\dfrac{0}{2} = 0$.

Exercice 32

Hiérarchie étendue — application directe

(a) $(\ln x)^5 \ll x$ (cas particulier de $(\ln x)^q \ll x^p$ avec $p = 1$, $q = 5$), donc $\dfrac{(\ln x)^5}{x} \to 0$.

(b) On pose $u = x/2$ (donc $x = 2u$, et $u \to +\infty$ avec x) :

$$\frac{x^3}{e^{x/2}} = \frac{(2u)^3}{e^u} = 8\,\frac{u^3}{e^u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$$

puisque $u^3 \ll e^u$.

(c) Une puissance de x (ici $x^{1/2}$) l'emporte toujours sur une puissance de $\ln(x)$ (ici $(\ln x)^{10}$), donc $\dfrac{\sqrt{x}}{(\ln x)^{10}} \to +\infty$.

(d) $xe^{-2x} = \dfrac{x}{e^{2x}} \to 0$ (une puissance de x est toujours négligeable devant une exponentielle, même à taux 2).

Deux exponentielles à taux différents

(e) On factorise par le taux le plus grand, e^{2x} :

$$e^{2x} - e^{x} = e^{2x}\left(1 - e^{-x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{2x}\cdot(1-0) = +\infty.$$

(f) On factorise par e^{3x} :

$$e^{x} - e^{3x} = e^{3x}\left(e^{-2x} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{3x}\cdot(0-1) = -\infty.$$

(g) On divise numérateur et dénominateur par e^{3x} (le taux le plus élevé présent) :

$$\frac{e^{2x}+x}{e^{3x}-1} = \frac{e^{-x}+x\,e^{-3x}}{1-e^{-3x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{0+0}{1-0} = 0.$$

Produits puissance-log contre exponentielle

(h) On factorise par e^{x} :

$$x^4(\ln x)^2 - e^{x} = e^{x}\left(\frac{x^4(\ln x)^2}{e^{x}} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{x}\cdot(0-1) = -\infty$$

car un produit puissance$\times$ log reste $\ll e^{x}$.

(i) On factorise par e^{2x} :

$$e^{2x} - x^{10}\ln(x) = e^{2x}\left(1 - \frac{x^{10}\ln(x)}{e^{2x}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{2x}\cdot(1-0) = +\infty.$$

(j) On divise numérateur et dénominateur par e^{2x} :

$$\frac{x^3e^{x} - e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{x^3e^{-x} - 1}{1+e^{-2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{0-1}{1+0} = -1.$$

(k) On factorise par e^{2x} (le terme le plus fort) :

$$\sqrt{x}\,e^{x} - e^{2x} = e^{2x}\left(\sqrt{x}\,e^{-x} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{2x}\cdot(0-1) = -\infty.$$

Quotients à trois familles

(l) Le terme dominant global est e^{2x}. On divise tout par e^{2x} :

$$\frac{x^2\ln(x) + e^{x}}{e^{2x} - x} = \frac{\dfrac{x^2\ln(x)}{e^{2x}} + e^{-x}}{1 - xe^{-2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{0+0}{1-0} = 0.$$

(m) Ici le numérateur est dominé par e^{x}, mais le dénominateur est dominé par $e^{x/2}$ (car $x^5 \ll e^{x/2}$) : les deux ne partagent **pas** le même terme dominant. On divise tout par $e^{x/2}$:

$$\frac{e^{x} + \ln(x)}{x^5 + e^{x/2}} = \frac{e^{x/2} + \ln(x)\,e^{-x/2}}{x^5e^{-x/2} + 1}.$$

Au numérateur, $e^{x/2} \to +\infty$ et $\ln(x)e^{-x/2} \to 0$, donc le numérateur $\to +\infty$. Au dénominateur, $x^5e^{-x/2} \to 0$, donc le dénominateur $\to 1$. La limite vaut $\dfrac{+\infty}{1} = +\infty$.

(n) On divise numérateur et dénominateur par e^x :

$$\frac{\ln(x) + x^{100}}{e^x - x^{100}} = \frac{\ln(x)\, e^{-x} + x^{100} e^{-x}}{1 - x^{100} e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{0+0}{1-0} = 0.$$

Attention : le cas $x \to -\infty$

(o) Quand $x \to -\infty$, $e^x \to 0$ (et non $+\infty$!), donc c'est le terme polynomial x^4 qui domine : $x^4 \to +\infty$. Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^4 - e^x\right) = +\infty - 0 = +\infty.$$

(p) Quand $x \to -\infty$, $e^x \to 0$. Et $x^5 \to -\infty$ (puissance impaire d'un nombre très négatif), donc $-x^5 \to +\infty$. Ainsi

$$\lim_{x\to-\infty} \left(e^x - x^5\right) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$