Résumé du chapitre 3

Limites à l'infini — polynômes, logarithmes, exponentielles et comparaison des croissances

Mohamed Nouidha
Collège Sainte-Anne

Session Automne 2026

Table des matières

1 Mise en contexte **1**

2 Fonctions polynomiales à l'infini **1**

3 Fonctions logarithmiques **3**

4 Fonctions exponentielles **4**

5 Limite d'une fonction composée **5**

6 Comparaison des croissances à l'infini **6**

7 Résumé **8**

1. Mise en contexte

Idée clé

Imaginez trois coureurs qui partent ensemble et courent indéfiniment : $\ln(x)$ avance de moins en moins vite, x^p garde une vitesse régulière, e^x accélère sans cesse. Peu importe qui est en tête au départ, **à très long terme** c'est toujours e^x qui gagne, puis x^p, puis $\ln(x)$ arrive loin derrière. Tout ce chapitre consiste à rendre cette idée **rigoureuse et calculable**.

2. Fonctions polynomiales à l'infini

Idée clé

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Quand $x \to \pm\infty$, le terme $a_n x^n$ **domine** tous les autres :

$$P(x) \sim a_n x^n \quad \text{(à l'infini)}.$$

Le comportement de $P(x)$ à l'infini est donc celui de son terme dominant $a_n x^n$.

Rappel

En factorisant par la plus grande puissance, $P(x) = x^n\left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \dfrac{a_0}{x^n}\right)$. Comme chaque $\dfrac{1}{x^k} \to 0$ quand $x \to \pm\infty$, il reste $P(x) \approx a_n x^n$. Cette **mise en évidence de la plus grande puissance** revient constamment dans ce chapitre : c'est le réflexe devant une forme indéterminée $\infty - \infty$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Méthode

Deux éléments suffisent pour conclure : le **degré** n (pair ou impair) et le **signe** du coefficient dominant a_n.

Terme dominant	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
$a_n x^n$, n pair, $a_n > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$a_n x^n$, n pair, $a_n < 0$	$-\infty$	$-\infty$
$a_n x^n$, n impair, $a_n > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a_n x^n$, n impair, $a_n < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Truc mnémotechnique : pensez à x^2 (mêmes branches des deux côtés) contre x^3 (branches opposées); le signe de a_n ne fait que retourner le dessin.

Exemple

$P(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5$. Terme dominant : $2x^4$ (degré 4 pair, coefficient $2 > 0$). D'après la table, les deux limites valent $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty.$$

Exemple

$Q(x) = -3x^5 + 100x^2 - 1$. Terme dominant : $-3x^5$ (degré 5 impair, coefficient $-3 < 0$) :

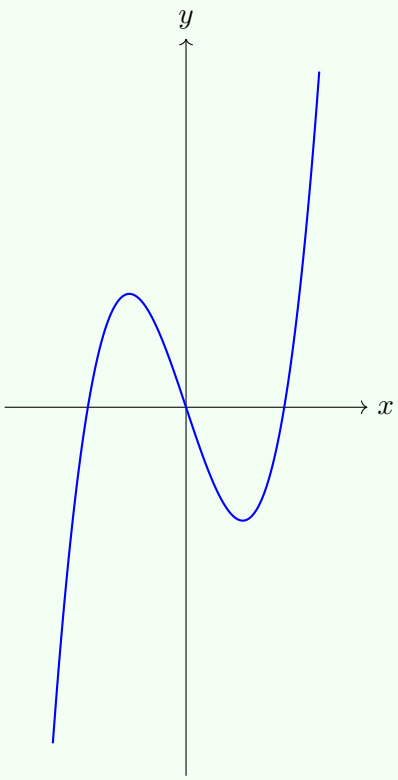
$$Q(x) = -3x^5\left(1 - \frac{100}{3x^3} + \frac{1}{3x^5}\right) \sim -3x^5 \quad (x \to \pm\infty).$$

Degré impair, $a_n < 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} Q(x) = +\infty.$$

Exemple graphique

$f(x) = x^3 - 3x$: terme dominant x^3 (impair, positif) $\Rightarrow$ la courbe descend à gauche et monte à droite, exactement comme le prédit la table.



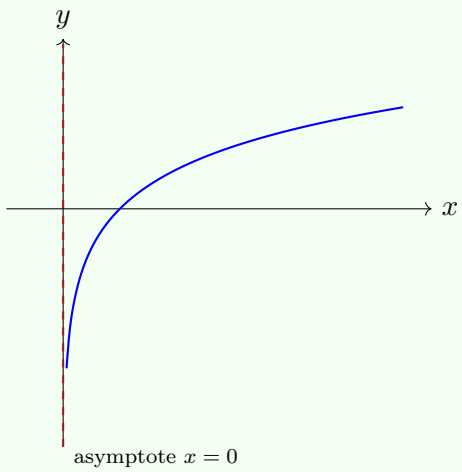
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

3. Fonctions logarithmiques

Domaine

$g(x) = \ln(x)$ est défini seulement si $x > 0$: $\text{dom}(g) =]0, +\infty[$. Pour trouver le domaine de $\ln(u(x))$, résoudre $u(x) > 0$: **toujours** la première étape avec un logarithme.

Exemple : $\ln(x)$



$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ est asymptote verticale, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ (très lentement).

Méthode

Pour $h(x) = \ln(3x)$: domaine $3x > 0 \iff x > 0$, asymptote verticale $x = 0$ (car $x \to 0^+ \Rightarrow 3x \to 0^+$), et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(3x) = +\infty$. On note que $\ln(3x) = \ln(3) + \ln(x)$: c'est la courbe de $\ln(x)$ déplacée vers le haut de $\ln(3)$.

Attention

Pour le domaine d'un logarithme dont l'intérieur est une fraction, comme $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$, il faut résoudre $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$ avec un **tableau de signes**, pas seulement exclure les zéros séparément. Ici : $\text{dom}(f) =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

4. Fonctions exponentielles

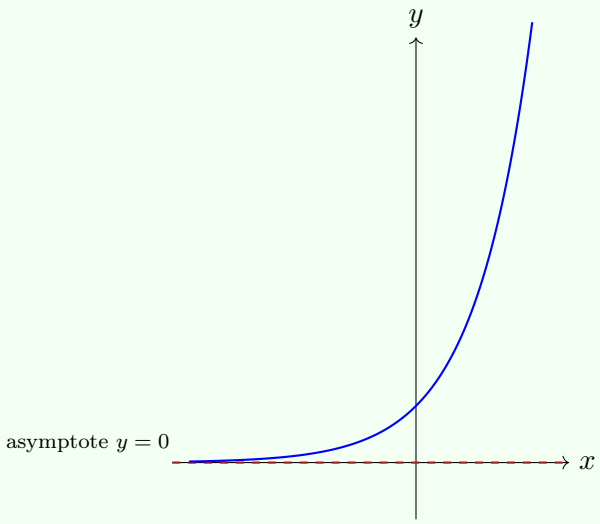
Domaine et limites : $p(x) = e^x$

L'exponentielle est définie pour tout réel : $\text{dom}(p) = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ (très rapidement)}, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

La droite $y = 0$ est donc une **asymptote horizontale** à gauche.

Exemple : e^x



Méthode

Pour e^{kx} : si $k > 0$, même comportement que e^x (croît vers $+\infty$ à droite, tend vers 0 à gauche); si $k < 0$, comportement inversé, comme e^{-x}.

Exemple

$f(x) = 2 + e^{-x}$. Quand $x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$ donc $f(x) \to 2$; quand $x \to -\infty$, $e^{-x} \to +\infty$ donc $f(x) \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \text{ (asymptote horizontale } y = 2 \text{ à droite)}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Rappel

Astuce générale : pour « constante + exponentielle qui tend vers 0 », l'asymptote horizontale est simplement **la constante**.

5. Comparaison des croissances à l'infini

Idée clé

On veut déterminer rapidement, quand $x \to +\infty$, le comportement de fractions du type $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\dfrac{\ln(x)}{x^p}$, $\dfrac{e^x}{x^p}$, typiquement des indéterminations $\dfrac{\infty}{\infty}$. On les résout en comparant **qui grandit le plus vite**.

Méthode

Fractions de polynômes : soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $n = \deg(P)$, $m = \deg(Q)$.

- Si $n < m$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$.
- Si $n = m$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n}{b_m}$ (rapport des coefficients dominants).
- Si $n > m$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$ (le signe dépend de x et des coefficients).

Méthode : diviser numérateur et dénominateur par la plus grande puissance de x présente au **dénominateur**.

Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+1}{5x^3-2}$: on divise haut et bas par x^3 :

$$\frac{3x^2+1}{5x^3-2} = \frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{5-\frac{2}{x^3}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{0+0}{5-0} = 0.$$

Ceci confirme la règle : degré du numérateur (2) < degré du dénominateur (3).

Résultat à retenir

Logarithme vs puissance ($\ln(x)$ augmente très lentement) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0 \quad \text{pour tout } p > 0.$$

Exponentielle vs puissance (e^x explose beaucoup plus vite) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad \text{pour tout } p > 0.$$

Idée clé

Hiérarchie finale des croissances, quand $x \to +\infty$ (avec $p > 0$) :

$$\boxed{\ln(x) \ll x^p \ll e^x}$$

Traduction pratique : $\dfrac{\ln(x)}{x^p} \to 0$, $\dfrac{x^p}{e^x} \to 0$, donc aussi $\dfrac{\ln(x)}{e^x} \to 0$. La hiérarchie s'étend naturellement : $(\ln x)^q \ll x^p$ pour tous $p, q > 0$; si $a > b > 0$, $e^{bx} \ll e^{ax}$; un produit puissance$\times \ln$, comme $x^5 \ln(x)$, reste dans la famille « polynôme » et demeure $\ll e^{ax}$ pour tout $a > 0$.

Méthode

Factoriser par le terme dominant en 3 étapes :

1. Repérer le terme qui domine tous les autres (hiérarchie étendue).
2. Factoriser ce terme dans toute l'expression.
3. Chaque terme restant, une fois divisé par le terme dominant, tend vers 0 : conclure à partir de ce qui reste.

Repère rapide : dans une somme ou différence, le terme dominant est presque toujours celui avec l'exponentielle au plus grand taux; sans exponentielle, c'est la puissance de x la plus élevée.

Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5\ln(x)-e^{2x}\right)$: e^{2x} domine. On factorise :

$$x^5\ln(x)-e^{2x}=e^{2x}\left(\frac{x^5\ln(x)}{e^{2x}}-1\right)\to e^{2x}\cdot(0-1)=-\infty.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3e^x+\ln(x)}{e^{2x}+x^2}$: e^{2x} domine globalement. En divisant tout par e^{2x}, chaque terme du numérateur et le terme $\dfrac{x^2}{e^{2x}}$ au dénominateur tendent vers 0, donc la limite vaut 0.

Attention

La hiérarchie $\ln(x)\ll x^p\ll e^x$ n'est valable **qu'en** $+\infty$. En $-\infty$, $\ln(x)$ n'est même pas défini, et $e^x\to 0$: l'exponentielle devient **négligeable** plutôt que dominante! Le comportement est alors dicté par le terme polynomial de plus haut degré. Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+e^x\right)=-\infty$ (car $e^x\to 0$, donc x^3 domine).

6. Limite d'une fonction composée

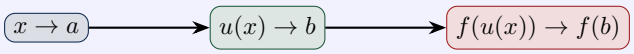
Théorème

Soit $f(u(x))$. Si $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ et $\lim\limits_{y\to b}f(y)=L$, alors $\lim\limits_{x\to a}f(u(x))=L$.

Méthode

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a}f(u(x))$ en 3 étapes :

1. Calculer $b=\lim\limits_{x\to a}u(x)$ avec les techniques déjà vues (terme dominant, règle des degrés, ...).
2. Identifier le comportement de f en b (valeur si b fini, limite usuelle si $b=\pm\infty$ ou $0^{\pm}$).
3. Conclure : $\lim\limits_{x\to a}f(u(x))=f(b)$ (ou la limite correspondante).



Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$: intérieur, degrés égaux $\Rightarrow \dfrac{x-1}{x+2} \to 1$; puis $\ln(1) = 0$, donc la limite vaut 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x+1}{x+3}}$: intérieur, degrés égaux $\Rightarrow \dfrac{2x+1}{x+3} \to 2$; puis e^2 est connu, donc la limite vaut e^2.

Attention

La substitution « passe bien » **tant que f a un comportement bien défini au point b.** Deux pièges :

- si b est un point où f n'est **pas définie** (ex. $\ln(0)$), il faut étudier le **signe** de l'intérieur autour de a pour savoir si on approche par 0^+ ou 0^-;
- si $b = \lim u(x)$ est **lui-même** une forme indéterminée, il faut d'abord la résoudre avant d'appliquer f.

Exemple : $\lim\limits_{x\to2^+} \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$, où l'intérieur $\to 0^+$ (pas une valeur finie non nulle) : on tombe dans $\ln(0^+) = -\infty$, pas dans une simple substitution.

7. Résumé

Idée clé

- **Polynômes** : le comportement à l'infini est celui du terme dominant $a_n x^n$ (degré + signe de a_n).
- $\ln(x)$: domaine $]0, +\infty[$; asymptote verticale en $x = 0$ ($\lim_{x\to0^+} = -\infty$); croît vers $+\infty$ mais très lentement.
- e^x : domaine $\mathbb{R}$; asymptote horizontale $y = 0$ à gauche ($\lim_{x\to-\infty} = 0$); croît vers $+\infty$ très rapidement.
- **Composée** $f(u(x))$: calculer d'abord $b = \lim u(x)$, puis regarder où f envoie b.
- **Fractions de polynômes** : diviser par la plus grande puissance au dénominateur; comparer les degrés n et m.
- **Hiérarchie des croissances** (en $+\infty$) : $\ln(x) \ll x^p \ll e^x$.

Rappel

Pièges fréquents à surveiller :

- Le terme dominant d'un polynôme est celui de **plus haut degré**, même si un autre terme semble « gagner » pour de petites valeurs de x.

- Le domaine d'un logarithme composé s'obtient en résolvant $u(x) > 0$, souvent avec un tableau de signes.
- Dans une composée $f(u(x))$, si $b = \lim u(x)$ est lui-même une forme indéterminée, la résoudre **avant** d'appliquer f.
- La hiérarchie $\ln(x) \ll x^p \ll e^x$ ne s'applique **qu'en** $+\infty$: en $-\infty$, $e^x \to 0$ devient négligeable.
- Pour factoriser par le terme dominant dans une somme, vérifiez d'abord s'il y a une exponentielle : elle écrase presque toujours le reste.