Résumé du chapitre 4

La continuité — types de discontinuités, domaine de continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Mohamed Nouidha
Collège Sainte-Anne

Session Automne 2026

1. Continuité en un point

f est continue en a si les trois conditions sont vérifiées

1. $f(a)$ existe $\quad (a \in \mathrm{Dom}(f))$;
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe (limites à gauche et à droite finies et égales) ;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Une seule condition qui échoue $\Rightarrow$ f n'est **pas** continue en a.

Exemple 1 : application directe

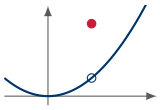
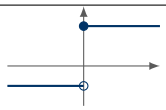
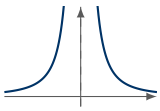
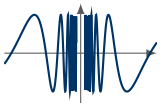
$f(x) = x^2 - 4x + 5$ en $a = 2$: $f(2) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4x + 5) = 1$ (substitution directe, polynôme), donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$. $\quad \Rightarrow$ f est **continue** en 2.

Point au bord du domaine

Si a est une borne du domaine, on n'utilise que la limite unilatérale définie. Exemple : $f(x) = \sqrt{x}$ en 0 : $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, donc f est continue en 0 (à droite).

Continuité sur un intervalle. f est continue sur un intervalle si elle est continue en chaque point intérieur (limite bilatérale) et, aux bornes fermées, avec la limite unilatérale appropriée. Exemple : $\sin x$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

2. Types de discontinuités

Type	Caractérisation en a	Réparable	Allure
Amovible (trou)	$\lim_{x\to a} f(x)$ existe, mais $\neq f(a)$ ou $f(a)$ n'existe pas	**Oui**	
Par saut	$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ (toutes deux finies)	**Non**	
Infinie	$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (asymptote verticale $x = a$)	**Non**	
Oscillante	f oscille sans se stabiliser : la limite n'existe pas	**Non**	

Terminologie du cours

Essentielle = non réparable : saut, infinie ou oscillante. Dans ces trois cas, $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas (comme nombre réel), et aucune valeur de $f(a)$ ne peut rétablir la continuité. Une discontinuité **amovible** se répare en posant $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Exemple 2 : amovible (forme $\frac{0}{0}$ par factorisation)

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ en $a = 1$. Pour $x \neq 1$: $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, mais $f(1)$ n'existe pas. $\Rightarrow$ discontinuité **amovible**, réparable en posant $f(1) = 2$.

Exemple 3 : amovible (forme $\frac{0}{0}$ par rationalisation)

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en $a = 1$. Pour $x \neq 1$: $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$, et $f(1)$ n'existe pas. $\Rightarrow$ **amovible**, réparable en posant $f(1) = \frac{1}{2}$.

Exemple 4 : saut

$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$ en $a = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$. Les limites latérales diffèrent $\Rightarrow$ discontinuité **par saut** (essentielle) : aucune valeur de $f(0)$ ne la répare.

Exemple 5 : infinie

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ en $a = 2$: le numérateur tend vers 5 et le dénominateur vers 0, d'où $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. $\Rightarrow$ discontinuité **infinie**, asymptote verticale $x = 2$.

Exemple 6 : oscillante

$f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Quand $x \to 0$, $1/x \to \pm\infty$ et $\sin(1/x)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs de $[-1, 1]$: la limite n'existe pas. $\Rightarrow$ discontinuité **oscillante** (essentielle).

3. Combinaisons de fonctions continues

Proposition

Si f et g sont continues en a, alors $f \pm g$, $c\,f$ $(c \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$ et $\dfrac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a.
Composition : si g est continue en a et f est continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a.

Fonctions de référence, continues sur leur domaine :

— polynômes, sin, cos, e^x : continues sur $\mathbb{R}$;
— rationnelles $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$: continues là où $Q(x) \neq 0$; $\tan x$: là où $\cos x \neq 0$;
— $\sqrt{x}$: continue sur $[0, +\infty[$; $\ln x$: continue sur $]0, +\infty[$.

Exemple 7

$h(x) = \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$: composée de $g(x) = x^2 + 1$ (polynôme, toujours > 0) et de $u \mapsto \sqrt{u}$ (continue sur $[0, +\infty[$).

4. Déterminer le domaine de continuité

Principe

Une expression construite par somme, produit, quotient et composition de fonctions continues est continue **partout où elle est définie**. Domaine de continuité = domaine de définition.

Méthode. Décomposer la fonction en briques, puis imposer : dénominateur $\neq 0$; sous une racine d'indice pair ≥ 0 ; dans un ln : > 0 ; dans tan : cos $\neq 0$; dans cot : sin $\neq 0$.

Exemple 8 : trois cas types

— $g(x) = \sqrt{2x-5}$: $2x - 5 \geq 0 \iff x \geq \frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ continue sur $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
— $h(x) = \ln(x^2-4)$: $(x-2)(x+2) > 0 \iff x < -2$ ou $x > 2$ $\Rightarrow$ continue sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.
— $p(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-9}$: $x \geq 1$ et $x \neq \pm 3$ $\Rightarrow$ continue sur $[1, +\infty[\backslash\{3\}$.

5. Fonctions définies par parties : trouver un paramètre

Aux points de jonction, la continuité exige : limite à gauche = limite à droite = valeur de f.

Exemple 9

$f(x) = \begin{cases} 3x + k & x \leq 2 \\ x^2 - 1 & x > 2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 6 + k, \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3.$

Continuité en 2 $\iff 6 + k = 3 \iff \boxed{k = -3}$ (seule valeur qui recolle les deux morceaux).

7. Erreurs fréquentes

À surveiller

— **Oublier le domaine :** $\ln x$ n'est pas définie en 0 ; on ne parle pas de continuité en un point hors du domaine sans le préciser.

— **Oublier les limites latérales :** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ vaut -1 à gauche de 0 et 1 à droite : saut, pas un trou.

— **Confondre bord du domaine et discontinuité :** $\sqrt{x-1}$ est continue en 1 (limite à droite seulement).

— **Conclure « amovible » trop vite :** pour un quotient, une forme $\frac{c}{0}$ avec $c \neq 0$ donne une discontinuité **infinie** ; seule une forme $\frac{0}{0}$ peut mener à un trou (sans le garantir : voir $\frac{x}{x^2}$ en 0).