Chapitre 5 - Exercices

La dérivée (partie 1)

Mohamed Nouidha

Automne 2026

A. Taux de variation moyen et instantané

Exercice 1 Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Calculer le taux de variation moyen de f sur $[1, 3]$, sur $[1\,;\,1{,}5]$ et sur $[1\,;\,1{,}1]$.

b) Montrer que, pour $h \neq 0$, $\text{TVM}_{[1,\,1+h]} = h - 1$.

c) En déduire $f'(1)$. Interpréter géométriquement le résultat (sécantes, tangente).

Exercice 2 La température (en °C) d'un four t minutes après sa mise en marche est $T(t) = 20+15t-t^2$, pour $0 \leq t \leq 7$.

a) Calculer le taux de variation moyen de la température entre $t = 2$ et $t = 5$. Préciser les unités et interpréter.

b) Montrer que $\dfrac{T(2+h) - T(2)}{h} = 11 - h$ pour $h \neq 0$.

c) Quel est le taux de variation **instantané** de la température à $t = 2$? Interpréter.

B. Dérivée par la définition

Dans cette partie, les règles de dérivation sont **interdites**. On pourra vérifier ses réponses avec les règles à la partie D.

Exercice 3 $f(x) = 4x^2 - x$. Calculer $f'(x)$ à l'aide de la définition, puis $f'(-1)$.

Exercice 4 $f(x) = x^3-2x$. Calculer $f'(x)$ à l'aide de la définition. *(Rappel : $(x+h)^3 = x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$.)*

Exercice 5 $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Calculer $f'(x)$ à l'aide de la définition et préciser pour quelles valeurs de x elle existe.

Exercice 6 $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Calculer $f'(x)$ à l'aide de la définition. Pour quelles valeurs de x la dérivée existe-t-elle ? Comparer avec le domaine de f.

Exercice 7 Soit $f(x) = x^2 - 5$. Calculer $f'(3)$ en utilisant la **deuxième forme** de la définition : $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.

Exercice 8 ★ $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Calculer $f'(x)$ à l'aide de la définition. Le signe de $f'(x)$ dépend-il de x ? Que peut-on en dire sur les pentes des tangentes au graphe de f ?

C. Lecture graphique de la dérivée

Exercice 9 On donne ci-dessous le graphe d'une fonction f ainsi que sa tangente au point $(0,1)$ (en rouge).

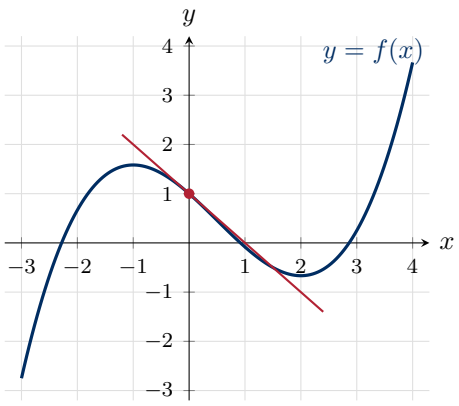
a) Estimer les abscisses où la tangente au graphe est horizontale. Que vaut f' en ces points ?

b) Sur quels intervalles $f'(x)$ est-elle positive ? négative ?

c) Lire $f'(0)$ à l'aide de la tangente tracée.

d) Classer en ordre croissant : $f'(-2)$, $f'(0{,}5)$, $f'(2{,}5)$. Justifier.

e) Esquisser l'allure du graphe de f'.



D. Règles de dérivation

Exercice 10 **Puissances.** Dériver (réécrire d'abord en puissances si nécessaire) et donner la réponse sans exposant négatif ni fractionnaire.

a) $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + x - 9$

b) $f(x) = \dfrac{7}{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

e) $f(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{4}{t^2}$

f) $f(x) = x\sqrt{x} + \pi^3$

Exercice 11 **Simplifier avant de dériver.** Réécrire chaque fonction comme une somme de puissances de x, puis dériver.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = (2x-1)^2$

c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 2}{x^2}$

Exercice 12 **Règle du produit.**

a) $f(x) = (x^3 - 2)(4x + 1)$

b) $f(x) = \sqrt{x}\,(3x^2 + x)$: dériver de deux façons (règle du produit, puis en développant d'abord) et vérifier que les résultats coïncident.

c) $f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$: dériver avec la règle du produit, puis développer $f(x)$ pour vérifier.

Exercice 13 **Règle du quotient.** Dériver et simplifier le numérateur.

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{x^3+2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

Exercice 14 **Choisir la bonne stratégie.** Dériver en choisissant la méthode la plus efficace.

a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)(x^2 - x)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} + 3\sqrt{x}$

Exercice 15 On sait que $u(2) = 3$, $u'(2) = -1$, $v(2) = -2$ et $v'(2) = 5$. Calculer :

a) $(3u - 2v)'(2)$ b) $(u\,v)'(2)$ c) $\left(\frac{u}{v}\right)'(2)$ d) $(v^2)'(2)$

Indice pour d) : $v^2 = v \cdot v$.

Exercice 16 **Trouver l'erreur.** Chacun des calculs suivants est faux. Identifier l'erreur et corriger.

a) $\big(x^2(x+1)\big)' = (x^2)' \cdot (x+1)' = 2x \cdot 1 = 2x$

b) $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'}{(x^2+1)'} = \frac{1}{2x}$

c) $\left(\frac{1}{x^4}\right)' = \frac{1}{4x^3}$

Exercice 17 **Application.** Une balle est lancée vers le haut ; sa hauteur (en m) après t secondes est $s(t) = -5t^2 + 30t + 2$.

a) Calculer la vitesse moyenne de la balle entre $t = 0$ et $t = 3$.

b) Déterminer la vitesse $v(t) = s'(t)$, puis la vitesse à $t = 1$.

c) À quel instant la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

d) Que vaut $v(4)$? Interpréter le signe.

E. Tangente et normale

Rappel

Tangente en $x = a$: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Normale en $x = a$ (si $f'(a) \neq 0$) : $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$.

Donner les équations sous la forme $y = mx + p$.

Exercice 18 Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Déterminer l'équation de la tangente et de la normale au point d'abscisse $a = 2$.

Exercice 19 Soit $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$. Déterminer l'équation de la tangente et de la normale au point d'abscisse $a = 4$.

Exercice 20 Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $a = 3$.

Exercice 21 Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Trouver tous les points du graphe où la tangente est horizontale.

Exercice 22 Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$. Trouver tous les points du graphe où la tangente est parallèle à la droite $y = 3x + 5$, et donner l'équation de chacune de ces tangentes.

Exercice 23 Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Trouver le point du graphe où la tangente est perpendiculaire à la droite $x + 2y = 4$, puis donner l'équation de cette tangente.

Exercice 24 ★ Le point $P(1, -3)$ n'est pas sur la parabole $y = x^2$. Trouver les équations des deux tangentes à la parabole qui passent par P.

Indice : écrire la tangente au point d'abscisse a, puis imposer qu'elle passe par P.

Exercice 25 ★ Déterminer les constantes b et c pour que la parabole $y = x^2 + bx + c$ soit tangente à la droite $y = 3x - 1$ au point d'abscisse $x = 2$.

F. Dérivabilité et continuité

Exercice 26 Soit $g(x) = |x+3|$. Étudier la dérivabilité de g en $x = -3$. Décrire le graphe en ce point.

Exercice 27 Soit $h(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Étudier la dérivabilité de h en $x = 0$.

Exercice 28 Soit $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Montrer à l'aide de la définition que f n'est pas dérivable en 2. De quel type de point s'agit-il ?

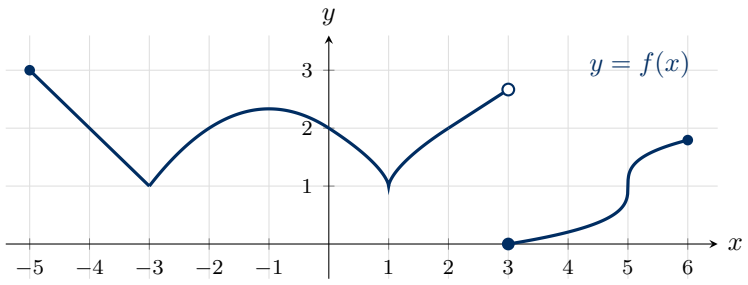
Exercice 29 ★ Déterminer a et b pour que la fonction $k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ soit continue **et** dérivable en $x = 1$.

Exercice 30 **Fonctions définies par parties.** Étudier la dérivabilité de chaque fonction au point de raccord indiqué. Si la fonction y est dérivable, donner la valeur de la dérivée en ce point.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 1 \\ 4\sqrt{x}-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ au point $x = 1$.

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4x-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ au point $x = 2$.

Exercice 31 **Interprétation graphique.** On donne le graphe d'une fonction f définie sur $[-5, 6]$.



a) Pour chacune des abscisses $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, dire si f est dérivable ou non. Justifier à partir du graphe.

b) Déterminer le signe ($+$, $-$ ou 0) de $f'(x)$ en $x = -4$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0{,}5$, $x = 2{,}5$ et $x = 4$.

Exercice 32 **Vrai ou faux ?** Justifier (par un argument ou un contre-exemple).

a) Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

b) Si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a.

c) Si f n'est pas dérivable en a, alors f n'est pas continue en a.

d) Si $f'(a) = 0$, la tangente au graphe en $(a, f(a))$ est horizontale.