Chapitre 5 - Solutionnaire

La dérivée (partie 1)

Mohamed Nouidha

Automne 2026

Comment utiliser ce solutionnaire

Essayez d'abord chaque exercice **seul**, puis comparez. Les réponses finales sont encadrées en vert. Dans les calculs par la définition, on garde « $\lim_{h\to 0}$ » à chaque ligne, jusqu'au moment où l'on remplace h par 0 : c'est aussi ce qui est attendu à l'examen.

A. Taux de variation moyen et instantané

Exercice 1 *$f(x) = x^2 - 3x + 2$.*

a) On calcule d'abord $f(1) = 0$, $f(3) = 2$, $f(1{,}5) = -0{,}25$ et $f(1{,}1) = -0{,}09$. Donc

$$\text{TVM}_{[1,3]} = \frac{2-0}{3-1} = \boxed{1}, \qquad \text{TVM}_{[1\,;\,1{,}5]} = \frac{-0{,}25-0}{0{,}5} = \boxed{-0{,}5},$$

$$\text{TVM}_{[1\,;\,1{,}1]} = \frac{-0{,}09-0}{0{,}1} = \boxed{-0{,}9}.$$

b) $f(1+h) = (1+h)^2 - 3(1+h) + 2 = 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2 = h^2 - h$. Pour $h \neq 0$:

$$\text{TVM}_{[1,\,1+h]} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h^2-h-0}{h} = \frac{h(h-1)}{h} = h - 1.$$

On retrouve bien les valeurs de a) avec $h = 2$, $h = 0{,}5$ et $h = 0{,}1$.

c) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \text{TVM}_{[1,\,1+h]} = \lim_{h\to 0}(h-1) = \boxed{-1}$.

Interprétation : chaque TVM est la pente d'une **sécante** passant par $P(1,0)$ et $Q(1+h, f(1+h))$. Quand $h \to 0$, Q glisse vers P et les sécantes pivotent autour de P vers la **tangente** en P, dont la pente est $f'(1) = -1$ (on le voit dans la suite 1 ; −0,5 ; −0,9 qui se rapproche de −1). Cette tangente est $y = 0 - 1(x-1)$, soit $y = -x + 1$.

Exercice 2 *$T(t) = 20 + 15t - t^2$, $0 \le t \le 7$ (en °C, t en minutes).*

a) $T(2) = 20 + 30 - 4 = 46$ et $T(5) = 20 + 75 - 25 = 70$.

$$\text{TVM}_{[2,5]} = \frac{T(5)-T(2)}{5-2} = \frac{70-46}{3} = \boxed{8\ °\text{C/min}}.$$

Entre la 2e et la 5e minute, la température a augmenté **en moyenne** de 8 °C par minute.

b) $T(2+h) = 20 + 15(2+h) - (2+h)^2 = 20 + 30 + 15h - 4 - 4h - h^2 = 46 + 11h - h^2$. Pour $h \neq 0$:

$$\frac{T(2+h)-T(2)}{h} = \frac{11h-h^2}{h} = \frac{h(11-h)}{h} = 11 - h.$$

c) $T'(2) = \lim_{h\to 0}(11-h) = \boxed{11\ °\text{C/min}}$. À l'instant précis $t = 2$ min, la température augmente à raison de 11 °C par minute (c'est la « vitesse » de réchauffement qu'afficherait un instrument à cet instant). Ce taux instantané est plus grand que le taux moyen de a) : le four se réchauffe de plus en plus lentement. En effet, avec les règles (partie D), $T'(t) = 15 - 2t$ diminue quand t augmente.

B. Dérivée par la définition

Exercice 3 $f(x) = 4x^2 - x$. ***Méthode :*** *polynôme ⇒ développer, puis mettre h en évidence.*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(4(x+h)^2 - (x+h)) - (4x^2 - x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - x - h - 4x^2 + x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{8xh + 4h^2 - h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(8x + 4h - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} (8x + 4h - 1) = 8x - 1.$$

$\boxed{f'(x) = 8x - 1}$ et $\boxed{f'(-1) = -9}$. (Vérification par les règles : $(4x^2 - x)' = 8x - 1$ ✓)

Exercice 4 $f(x) = x^3 - 2x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^3 - 2(x+h)) - (x^3 - 2x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h - x^3 + 2x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(3x^2 + 3xh + h^2 - 2)}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 2) = 3x^2 - 2.$$

$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 2}$

Exercice 5 $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. ***Méthode :*** *fraction ⇒ mettre au même dénominateur.*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+2} - \frac{1}{x+2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+2) - (x+h+2)}{h\,(x+h+2)(x+2)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\,(x+h+2)(x+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h+2)(x+2)} = -\frac{1}{(x+2)^2}.$$

$\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}}$, qui existe pour tout $x \neq -2$, c'est-à-dire sur tout le domaine de f.

Exercice 6 $f(x) = \sqrt{2x+1}$. ***Méthode :*** *racine carrée ⇒ multiplier par le conjugué.*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2x+2h+1} - \sqrt{2x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+2h+1) - (2x+1)}{h(\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1})} \qquad \text{car } (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1})} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}.$$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}}$, qui existe pour $2x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$.

Comparaison : le domaine de f est $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ (on a $2x+1 \geq 0$), mais celui de f' est $]-\frac{1}{2}, +\infty[$. En $x = -\frac{1}{2}$, on est à une **extrémité** du domaine : on ne peut parler que d'une dérivée latérale, et $\dfrac{f(-\frac{1}{2}+h) - f(-\frac{1}{2})}{h} = \dfrac{\sqrt{2h}}{h} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h\to 0^+]{} +\infty$: la tangente y est **verticale** (même situation que $\sqrt{x}$ en 0).

Exercice 7 *$f(x) = x^2 - 5$, calcul de $f'(3)$ avec la 2^e forme.*

On a $f(3) = 4$.

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-5)-4}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = \boxed{6}.$$

Ici, c'est le facteur $(x-3)$ (et non h) qu'on fait apparaître au numérateur pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$.

Exercice 8 ★ $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{h\,(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - x + hx - h - x^2 - hx + x}{h\,(x+h-1)(x-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\,(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = -\frac{1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

$\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}}$, $x \neq 1$.

Signe : $(x-1)^2 > 0$ pour tout $x \neq 1$, donc $f'(x) < 0$ **pour tout** x du domaine : le signe ne dépend pas de x. Toutes les tangentes au graphe ont une pente **négative** (aucune n'est horizontale) : le graphe « descend » partout.

Remarque. f décroît sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ séparément, mais pas sur tout son domaine : $f(0) = 0 < f(2) = 2$. L'asymptote verticale $x = 1$ « coupe » le graphe en deux morceaux.

C. Lecture graphique de la dérivée

Exercice 9 *Lecture sur le graphe de f et de sa tangente en $(0, 1)$.*

Les réponses attendues sont des lectures approximatives. Pour vérification, la courbe tracée est $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - x + 1$, dont la dérivée est $f'(x) = \frac{x^2-x-2}{2} = \frac{(x+1)(x-2)}{2}$.

a) La tangente est horizontale au « sommet » et au « creux » de la courbe : $\boxed{x \approx -1 \text{ et } x \approx 2}$. En ces points, la pente de la tangente est nulle : $f'(-1) = f'(2) = 0$.

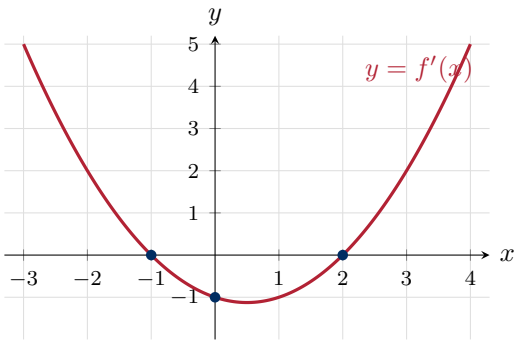
b) $f'(x) > 0$ là où le graphe monte : $\boxed{\text{sur }]-3, -1[\text{ et sur }]2, 4[}$; $f'(x) < 0$ là où il descend : $\boxed{\text{sur }]-1, 2[}$. (On prend des intervalles ouverts : aux extrémités -3 et 4 du domaine tracé, on ne peut parler que de dérivée latérale.)

c) La tangente rouge passe par $(0, 1)$ et $(1, 0)$: sa pente est $\dfrac{0-1}{1-0} = -1$, donc $\boxed{f'(0) = -1}$.

d) En $x = 0{,}5$, le graphe descend : $f'(0{,}5) < 0$. En $x = 2{,}5$, il monte, mais doucement (on vient de passer le creux) : $f'(2{,}5)$ est positive mais petite. En $x = -2$, il monte fortement : $f'(-2)$ est positive et grande. Donc

$$\boxed{f'(0{,}5) < f'(2{,}5) < f'(-2)} \qquad (\text{valeurs exactes : } -1{,}125\ ;\ 0{,}875\ ;\ 2).$$

e) On reporte les pentes : f' est positive, s'annule en -1, est négative entre -1 et 2 (minimum vers $x \approx 0{,}5$), s'annule en 2, puis redevient positive. Elle passe par $(0, -1)$. Le graphe de f' a l'allure d'une parabole ouverte vers le haut :



Rappel : la **hauteur** du graphe de f' en x est la **pente** du graphe de f en x.

D. Règles de dérivation

Exercice 10 **Puissances.** *On réécrit d'abord en puissances de x, on applique $(x^n)' = nx^{n-1}$, puis on revient à une forme sans exposant négatif ni fractionnaire.*

a) $f'(x) = 6 \cdot 5x^4 - 4 \cdot 3x^2 + 1 - 0 = \boxed{30x^4 - 12x^2 + 1}$

b) $f(x) = 7x^{-3}$, $f'(x) = -21x^{-4} = \boxed{-\dfrac{21}{x^4}}$

c) $f(x) = x^{2/3}$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \boxed{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}}$

d) $f(x) = 2x^{1/2} - 3x^{-1/2}$, $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} - 3 \cdot (-\frac{1}{2})x^{-3/2} = x^{-1/2} + \frac{3}{2}x^{-3/2} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{2x\sqrt{x}}} = \dfrac{2x+3}{2x\sqrt{x}}$

e) $f(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t^{-2}$, $f'(t) = \frac{1}{2}t + 8t^{-3} = \boxed{\dfrac{t}{2} + \dfrac{8}{t^3}}$

f) $f(x) = x^{3/2} + \pi^3$, $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + 0 = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$

Piège : π^3 est une **constante** (un nombre ≈ 31), donc $(\pi^3)' = 0$, et non $3\pi^2$.

Rappel : $x^{3/2} = x\sqrt{x}$ et $x^{-3/2} = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Exercice 11 **Simplifier avant de dériver.**

a) On divise terme à terme par $\sqrt{x} = x^{1/2}$: $f(x) = x^{2-\frac{1}{2}} + 3x^{-1/2} = x^{3/2} + 3x^{-1/2}$.

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{1/2} - \tfrac{3}{2}x^{-3/2} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}} = \frac{3(x^2-1)}{2x\sqrt{x}}.$$

b) On développe : $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, donc $\boxed{f'(x) = 8x - 4}$. (La règle de la chaîne, vue en partie 2, permettra de dériver $(2x-1)^2$ sans développer.)

c) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2} - \dfrac{5x^2}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} = x^2 - 5 + 2x^{-2}$, donc $f'(x) = 2x - 4x^{-3} = \boxed{2x - \dfrac{4}{x^3}}$.

Dans les trois cas, le dénominateur est un **monôme** (ou il n'y en a pas) : on évite la règle du quotient.

Exercice 12 **Règle du produit** $(uv)' = u'v + uv'$.

a) $u = x^3 - 2$, $v = 4x + 1 \Rightarrow u' = 3x^2$, $v' = 4$.

$$f'(x) = 3x^2(4x+1) + (x^3-2)\cdot 4 = 12x^3 + 3x^2 + 4x^3 - 8 = \boxed{16x^3 + 3x^2 - 8}.$$

b) **Règle du produit :** $u = \sqrt{x}$, $v = 3x^2 + x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v' = 6x + 1$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,(6x+1) = \frac{3x^2 + x + 2x(6x+1)}{2\sqrt{x}} = \frac{15x^2 + 3x}{2\sqrt{x}}.$$

En développant d'abord : $f(x) = 3x^{5/2} + x^{3/2}$, donc $f'(x) = \frac{15}{2}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{1/2}$.

Comparaison : $\dfrac{15x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{15x^2}{2x^{1/2}} + \dfrac{3x}{2x^{1/2}} = \frac{15}{2}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{1/2}$ ✓ $\qquad \boxed{f'(x) = \frac{15}{2}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}}$

c) $u = x + 1$, $v = x^2 - x + 1 \Rightarrow u' = 1$, $v' = 2x - 1$.

$$f'(x) = 1\cdot(x^2 - x + 1) + (x+1)(2x-1) = x^2 - x + 1 + 2x^2 + x - 1 = \boxed{3x^2}.$$

Vérification : $f(x) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$, donc $f'(x) = 3x^2$ ✓

Exercice 13 **Règle du quotient** $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

a) $u = 2x + 3$, $v = x - 4$, $u' = 2$, $v' = 1$: $f'(x) = \dfrac{2(x-4) - (2x+3)\cdot 1}{(x-4)^2} = \dfrac{2x - 8 - 2x - 3}{(x-4)^2} = \boxed{-\dfrac{11}{(x-4)^2}}$, $x \neq 4$.

b) $u = x^2$, $v = x^2 + 1$, $u' = 2x$, $v' = 2x$: $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \boxed{\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}}$.

c) Cas particulier $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ (avec le facteur 5) : $f'(x) = 5\cdot\left(-\dfrac{3x^2}{(x^3+2)^2}\right) = \boxed{-\dfrac{15x^2}{(x^3+2)^2}}$, $x \neq -\sqrt[3]{2}$.

d) $u = x^2 - 3x$, $v = 2x + 1$, $u' = 2x - 3$, $v' = 2$:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(2x+1) - (x^2-3x)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 3 - 2x^2 + 6x}{(2x+1)^2} = \boxed{\frac{2x^2 + 2x - 3}{(2x+1)^2}}, \quad x \neq -\tfrac{1}{2}.$$

e) $u = \sqrt{x}$, $v = x + 1$, $u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v' = 1$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - 2x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2} = \boxed{\frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}}, \quad x > 0.$$

(À la 2e étape, on a multiplié le numérateur et le dénominateur par $2\sqrt{x}$, en utilisant $\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x} = 2x$.)

Exercice 14 **Choisir la bonne stratégie.**

a) Plutôt que la règle du produit, on **développe** : $f(x) = x^2 - x + \dfrac{x^2}{x} - \dfrac{x}{x} = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$ ($x \neq 0$). Donc $\boxed{f'(x) = 2x}$, $x \neq 0$. (La règle du produit donne le même résultat, avec beaucoup plus de calculs.)

b) La dernière opération est une **somme** : on dérive chaque terme. Le premier est un quotient dont le dénominateur n'est pas un monôme : règle du quotient.

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, \qquad (3x^{1/2})' = \frac{3}{2}x^{-1/2} = \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}}$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Exercice 15 $u(2) = 3$, $u'(2) = -1$, $v(2) = -2$, $v'(2) = 5$.

a) $(3u - 2v)'(2) = 3u'(2) - 2v'(2) = 3(-1) - 2(5) = \boxed{-13}$

b) $(uv)'(2) = u'(2)v(2) + u(2)v'(2) = (-1)(-2) + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = \boxed{17}$

c) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(2) = \dfrac{u'(2)v(2) - u(2)v'(2)}{v(2)^2} = \dfrac{2 - 15}{(-2)^2} = \boxed{-\dfrac{13}{4}}$

d) $(v \cdot v)'(2) = v'(2)v(2) + v(2)v'(2) = 2\,v(2)\,v'(2) = 2(-2)(5) = \boxed{-20}$

Exercice 16 **Trouver l'erreur.**

a) **Erreur :** $(uv)' \neq u'v'$. **Correction** (règle du produit) : $\big(x^2(x+1)\big)' = 2x(x+1) + x^2 \cdot 1 = \boxed{3x^2 + 2x}$. Vérif. : $x^2(x+1) = x^3 + x^2$, de dérivée $3x^2 + 2x$ ✓

b) **Erreur :** $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \neq \dfrac{u'}{v'}$. **Correction** (règle du quotient) : $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \boxed{\dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}}$.

c) **Erreur :** on a « dérivé le dénominateur seul ». **Correction :** on réécrit d'abord $\dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$, d'où $(x^{-4})' = -4x^{-5} = \boxed{-\dfrac{4}{x^5}}$.

Exercice 17 **Application.** $s(t) = -5t^2 + 30t + 2$ *(m)*.

a) $s(0) = 2$ et $s(3) = -45 + 90 + 2 = 47$. Vitesse moyenne : $\dfrac{47 - 2}{3 - 0} = \boxed{15 \text{ m/s}}$.

b) $v(t) = s'(t) = \boxed{-10t + 30}$ (m/s), et $v(1) = \boxed{20 \text{ m/s}}$.

c) Au sommet, la balle cesse de monter : $v(t) = 0 \iff -10t + 30 = 0 \iff t = 3$. Hauteur maximale : $s(3) = \boxed{47 \text{ m}}$, atteinte à $\boxed{t = 3 \text{ s}}$.

d) $v(4) = -40 + 30 = \boxed{-10 \text{ m/s}}$. Le signe négatif signifie que la hauteur **diminue** : la balle **redescend**, à 10 m/s.

E. Tangente et normale

Méthode : calculer (1) $f(a)$, (2) $f'(x)$ puis $f'(a)$, (3) remplacer dans $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ et simplifier sous la forme $y = mx + p$. Pour la normale, la pente est $-\dfrac{1}{f'(a)}$.

Exercice 18 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $a = 2$.

$f(2) = 8 - 8 + 1 = 1$; $f'(x) = 3x^2 - 4x$, $f'(2) = 12 - 8 = 4$.

— Tangente : $y = 1 + 4(x-2)$, soit $\boxed{y = 4x - 7}$.

— Normale (pente $-\frac{1}{4}$) : $y = 1 - \frac{1}{4}(x-2)$, soit $\boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}$.

Exercice 19 $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $a = 4$.

$f(4) = \dfrac{4}{2} = 2$; $f(x) = 4x^{-1/2}$, $f'(x) = -2x^{-3/2} = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$, $f'(4) = -\dfrac{2}{4 \cdot 2} = -\dfrac{1}{4}$.

— Tangente : $y = 2 - \frac{1}{4}(x-4)$, soit $\boxed{y = -\frac{1}{4}x + 3}$.

— Normale (pente $-\dfrac{1}{-1/4} = 4$) : $y = 2 + 4(x-4)$, soit $\boxed{y = 4x - 14}$.

Exercice 20 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $a = 3$.

$f(3) = \dfrac{4}{2} = 2$. Règle du quotient : $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $f'(3) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Tangente : $y = 2 - \frac{1}{2}(x-3)$, soit $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$.

Exercice 21 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ *: tangentes horizontales.*

Tangente horizontale $\iff f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1) = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = 1.$$

$f(-2) = -16 + 12 + 24 + 1 = 21$ et $f(1) = 2 + 3 - 12 + 1 = -6$. Points : $\boxed{(-2,\, 21) \text{ et } (1,\, -6)}$ (tangentes $y = 21$ et $y = -6$).

Exercice 22 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ *: tangentes parallèles à* $y = 3x + 5$.

Parallèle $\iff$ même pente : on résout $f'(x) = 3$.

$$3x^2 - 12x + 12 = 3 \iff 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x-1)(x-3) = 0.$$

— $x = 1$: $f(1) = 7$, point $(1, 7)$, tangente $y = 7 + 3(x-1)$, soit $\boxed{y = 3x + 4}$.

— $x = 3$: $f(3) = 27 - 54 + 36 = 9$, point $(3, 9)$, tangente $y = 9 + 3(x-3)$, soit $\boxed{y = 3x}$.

Les deux tangentes ont bien la pente 3 et sont distinctes de la droite $y = 3x + 5$.

Exercice 23 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ *: tangente perpendiculaire à* $x + 2y = 4$.

On isole y : $y = -\frac{1}{2}x + 2$, de pente $-\frac{1}{2}$. Perpendiculaire $\iff m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \iff m = 2$.

$$f'(x) = 2x - 4 = 2 \iff x = 3, \qquad f(3) = 9 - 12 + 5 = 2.$$

Point $\boxed{(3, 2)}$, tangente $y = 2 + 2(x-3)$, soit $\boxed{y = 2x - 4}$.

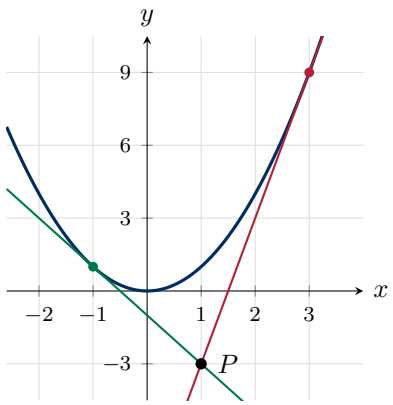
Exercice 24 ★ *$P(1,-3)$ et la parabole $y=x^2$.*

Avec $f(x)=x^2$, $f'(a)=2a$. La tangente au point d'abscisse a est

$$y = a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2.$$

Elle passe par $P(1,-3)$ si et seulement si

$$-3 = 2a - a^2 \iff a^2 - 2a - 3 = 0 \iff (a-3)(a+1) = 0.$$



— $a=3$: $\boxed{y=6x-9}$ (point de contact $(3,9)$) ;

— $a=-1$: $\boxed{y=-2x-1}$ (point de contact $(-1,1)$).

Vérification : $6(1)-9=-3$ ✓ $\quad -2(1)-1=-3$ ✓

Piège : on ne peut pas utiliser $f'(1)$, car P n'est **pas** sur la courbe : le point de contact est inconnu, c'est a.

Exercice 25 ★ *$y=x^2+bx+c$ tangente à $y=3x-1$ au point d'abscisse 2.*

Avec $f(x)=x^2+bx+c$, être tangente en $x=2$ impose **deux** conditions :

— **même pente :** $f'(2)=3$. Or $f'(x)=2x+b$, donc $4+b=3$, d'où $b=-1$;

— **même point :** $f(2)=3(2)-1=5$, donc $4+2b+c=5$, soit $4-2+c=5$, d'où $c=3$.

$\boxed{b=-1,\ c=3}$: la parabole est $y=x^2-x+3$. Vérification : $x^2-x+3-(3x-1)=x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$; la parabole touche la droite en $x=2$ seulement et reste au-dessus.

F. Dérivabilité et continuité

Méthode – étudier la dérivabilité en a

(1) Vérifier la **continuité** en a : si f n'est pas continue en a, elle n'y est pas dérivable (contraposée du théorème).

(2) Si f est continue, calculer les deux limites latérales du taux de variation : $f'_-(a) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $f'_+(a) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

(3) f est dérivable en a si et seulement si ces deux limites existent, sont **finies** et **égales**.

Exercice 26 *$g(x)=|x+3|$ en $x=-3$.*

$g(-3)=0$ et $g(-3+h)=|h|$, donc

$$\frac{g(-3+h)-g(-3)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1 & \text{si } h<0 \\ 1 & \text{si } h>0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad g'_-(-3) = -1 \neq g'_+(-3) = 1.$$

$\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } -3}$ (bien qu'elle y soit continue). Le graphe est celui de $|x|$ décalé de 3 unités vers la gauche : il forme un **coin** au point $(-3,0)$, avec deux demi-tangentes de pentes -1 et 1.

Exercice 27 *$h(x) = x^2 + 1$ si $x < 0$, $h(x) = 2x + 1$ si $x \geq 0$, en $x = 0$.*

Comme la fonction s'appelle déjà h, on utilise ici la 2$^{\text{e}}$ forme de la définition (avec $x \to 0$).

Continuité : $h(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1) = 1$: h est continue en 0.

Dérivées latérales :

$$h'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x^2+1)-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} x = 0, \qquad h'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2x+1)-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2.$$

Comme $0 \neq 2$, h n'est pas dérivable en 0 : son graphe présente un **coin** en $(0,1)$ (demi-tangente horizontale à gauche, de pente 2 à droite).

Exercice 28 *$f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ en $x = 2$.*

$f(2) = 0$ et $f(2+h) = \sqrt[3]{h} = h^{1/3}$, donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

(des deux côtés, car $h^2 > 0$). La limite n'est pas un nombre réel : f n'est pas dérivable en 2. f y est pourtant continue ; il s'agit d'un point à **tangente verticale** : la droite $x = 2$ (même situation que $\sqrt[3]{x}$ en 0, décalée de 2 vers la droite).

Exercice 29 ★ *$k(x) = x^2$ si $x \leq 1$, $k(x) = ax + b$ si $x > 1$.*

1) Continuité en 1 (condition nécessaire) : $k(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b) = a+b$. Il faut donc $a + b = 1$.

2) Dérivées latérales :

$$k'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2+h) = 2,$$

$$k'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{a(1+h)+b-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(a+b-1)+ah}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{ah}{h} = a \qquad (\text{car } a+b=1).$$

3) Dérivable $\iff$ $a = 2$, puis $b = 1 - a = -1$. $\boxed{a = 2,\ b = -1}$

Remarque. la droite $y = 2x - 1$ est exactement la tangente à $y = x^2$ en $(1,1)$ (exemple 1 des notes) : le morceau de droite « prolonge » la parabole sans coin. Sans la condition $a + b = 1$, le terme $\frac{a+b-1}{h}$ tendrait vers $\pm\infty$: c'est la contraposée « non continue $\Rightarrow$ non dérivable » en action.

Exercice 30 **Fonctions définies par parties.**

a) **Continuité :** $f(1) = 4\sqrt{1} - 2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$: f est continue en 1.

Dérivées latérales :

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2+1-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2+h) = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{4\sqrt{1+h}-2-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4\left(\sqrt{1+h}-1\right)}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{4\left((1+h)-1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

$f'_-(1) = f'_+(1) = 2$: $\boxed{f \text{ est dérivable en 1 et } f'(1) = 2}$.

b) **Continuité :** $g(2) = 4(2) - 3 = 5$, mais $\lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4 \neq 5$: g fait un **saut** en 2.

g n'est donc pas dérivable en 2 (contraposée du théorème).

Vérification : $\dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2 - 5}{h} = \dfrac{h^2 + 4h - 1}{h} = h + 4 - \dfrac{1}{h} \xrightarrow[h \to 0^-]{} +\infty$.

Piège (comme le cas 4 des notes) : les deux morceaux ont la même pente en $x = 2$ ($2x = 4$ à gauche et 4 à droite), mais cela ne suffit pas, car la fonction n'est pas continue.

Exercice 31 Interprétation graphique.

a)

Abscisse	Dérivable ?	Justification
$x = -3$	non	**coin** : la courbe est continue mais change brusquement de pente
$x = -1$	oui	courbe lisse ; tangente **horizontale** (sommet), donc $f'(-1) = 0$
$x = 1$	non	**pointe** (cuspide) : les pentes tendent vers $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite
$x = 3$	non	**discontinuité** (saut) : f n'est pas continue en 3
$x = 4$	oui	courbe lisse, sans coin ni pointe ni partie verticale
$x = 5$	non	**tangente verticale** (la courbe y est continue)

b)

x	-4	-2	-1	0,5	2,5	4
signe de $f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	$+$
graphe	descend	monte	sommet	descend	monte	monte

Exercice 32 Vrai ou faux ?

a) Faux. Contre-exemple : $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable (coin). La réciproque du théorème est fausse.

b) Vrai. C'est la **contraposée** du théorème « dérivable en $a \Rightarrow$ continue en a ».

c) Faux. Même contre-exemple : $|x|$ n'est pas dérivable en 0, et pourtant elle y est continue. (Autres contre-exemples : $x^{2/3}$ ou $\sqrt[3]{x}$ en 0.)

d) Vrai. Si $f'(a) = 0$, alors f est dérivable en a et la tangente en $(a, f(a))$ a pour pente 0 : son équation est $y = f(a) + 0 \cdot (x - a)$, soit $y = f(a)$, une droite horizontale.