Résumé du chapitre 5

La dérivée (partie 1)

Mohamed Nouidha

Automne 2026

1. Du taux de variation moyen au taux instantané

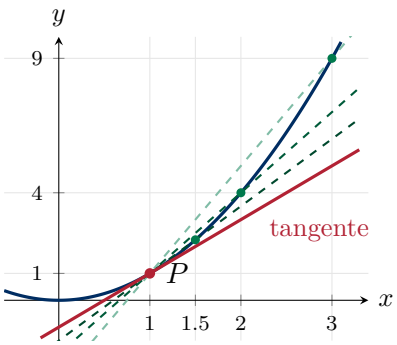
Définition – Taux de variation moyen

Le taux de variation moyen de f entre a et $a+h$ ($h \neq 0$) est

$$\mathrm{TVM}_{[a,\,a+h]} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

C'est la **pente de la sécante** passant par $P(a, f(a))$ et $Q(a+h, f(a+h))$.

Quand $h \to 0$, Q glisse vers P : les sécantes « pivotent » autour de P et se rapprochent d'une droite limite, la **tangente** en P.



$f(x) = x^2$, $a = 1$: les pentes des sécantes 4 ; 3 ; 2,5… tendent vers 2, la pente de la tangente.

Taux moyen	Taux instantané
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
pente de la **sécante**	pente de la **tangente**
vitesse moyenne	vitesse instantanée
sur un **intervalle**	en un **point**

2. Définition de la dérivée

Définition – Nombre dérivé

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant a. f est **dérivable en** a si la limite suivante existe et est un **nombre réel** :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{ou, de façon équivalente (avec } x = a+h\text{),} \qquad f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

$f'(a)$ est la **pente de la tangente** au graphe au point $(a, f(a))$. Si la limite n'existe pas (ou vaut $\pm\infty$), f n'est **pas dérivable** en a.

Définition – Fonction dérivée

f' associe à chaque x où f est dérivable le nombre

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Notations (si $y = f(x)$) :

$$f'(x) \qquad y' \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]$$

En un point : $f'(a)$ ou $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$.

Méthode – lever l'indétermination $\frac{0}{0}$

Numérateur et dénominateur tendent vers 0 : on ne peut **jamais** remplacer directement h par 0. On fait apparaître un facteur h au numérateur, puis on simplifie ($h \neq 0$) :

- **polynôme** : développer, puis mettre h en évidence ;
- **fraction** : mettre au même dénominateur ;
- **racine carrée** : multiplier par le **conjugué**, car $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

À retenir

La **hauteur** du graphe de f' en x est égale à la **pente** du graphe de f en x :

— $f'(x) > 0$: le graphe de f **monte** ;

— $f'(x) < 0$: le graphe de f **descend** ;

— $f'(x) = 0$: tangente **horizontale**.

Attention

— On garde « $\lim_{h\to 0}$ » à chaque ligne, jusqu'au moment où l'on remplace h par 0.

— La dérivée n'a de sens qu'en un point **intérieur** du domaine. À une extrémité (ex. : $\sqrt{x}$ en 0), on ne peut parler que de dérivée latérale.

Exemple type : $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x.$$

Résultats obtenus par la définition

$(mx+b)' = m$ (la tangente à une droite est la droite elle-même) $\quad (c)' = 0 \quad (x)' = 1 \quad (x^2)' = 2x$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$: $\sqrt{x}$ est définie en 0, mais n'y est pas dérivable (tangente **verticale**).

3. Règles de dérivation

Règles de base (u, v **dérivables,** $c \in \mathbb{R}$)

Constante : $(c)' = 0, \quad (x)' = 1$

Multiple : $(c\,u)' = c\,u'$

Somme / différence : $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Puissance (n réel) : $(x^n)' = n\,x^{n-1}$

« l'exposant descend devant, puis on lui enlève 1 »

Produit (Leibniz) : $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

Quotient ($v \neq 0$) : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

Cas particulier : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

« dérivée du haut × bas, moins haut × dérivée du bas, sur le bas au carré »

Réécrire avant de dériver : la règle de la puissance s'applique à x^n, on réécrit donc racines et fractions en puissances.

Fonction	Réécriture	Dérivée	Forme finale
$\sqrt[3]{x}$	$x^{1/3}$	$\frac{1}{3}x^{-2/3}$	$\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$\dfrac{1}{x^3}$	x^{-3}	$-3x^{-4}$	$-\dfrac{3}{x^4}$
$\dfrac{4}{\sqrt{x}}$	$4x^{-1/2}$	$-2x^{-3/2}$	$-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$
$x^2\sqrt{x}$	$x^{5/2}$	$\frac{5}{2}x^{3/2}$	$\frac{5}{2}x\sqrt{x}$

Méthode – choisir la bonne règle

(1) **Simplifier / réécrire** d'abord : racines → puissances ; si le dénominateur est un **monôme**, diviser terme à terme pour éviter le quotient.
Ex. : $\dfrac{x^2+3}{x} = x + 3x^{-1}$, donc $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{x^2}$.

(2) Repérer la **dernière opération** qu'on ferait pour évaluer $f(x)$ (somme, produit, quotient, puissance de x) : c'est elle qui dicte la règle.

(3) Appliquer la règle, puis **simplifier**.

Une fonction appliquée à une autre, ex. $(3x+1)^7$: règle de la chaîne, en partie 2.

Erreurs fréquentes

— $(uv)' \neq u'v'$: $(x \cdot x)' = 2x$, mais $(x)' \cdot (x)' = 1$.
— $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \neq \dfrac{u'}{v'}$, et l'**ordre** compte : $u'v - uv'$, et non $uv' - u'v$.
— On ne développe généralement **pas** le dénominateur v^2.
— $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' \neq \dfrac{1}{3x^2}$: on ne « dérive » pas le dénominateur seul ; on réécrit x^{-3}.
— π^2, $\sqrt{5}\ldots$ sont des **constantes** : leur dérivée est 0.

Application – vitesse

Si $s(t)$ est la position (ex. : hauteur d'une balle), la **vitesse** est $v(t) = s'(t)$. $v(t) > 0$: l'objet monte ; $v(t) = 0$: sommet ; $v(t) < 0$: l'objet redescend.
Ex. : $s(t) = 20t - 5t^2$ donne $v(t) = 20 - 10t$, nulle en $t = 2$: la balle est au sommet, à $s(2) = 20$ m.

4. Tangente et normale au graphe

Rappel – droites

Point-pente : la droite de pente m passant par (x_0, y_0) est $y = y_0 + m(x - x_0)$.
d_1 et d_2 **parallèles** $\iff m_1 = m_2$.
d_1 et d_2 **perpendiculaires** $\iff m_1 m_2 = -1$.
Horizontale : $m = 0$, $y = p$. Une droite verticale $(x = k)$ n'a pas de pente.

Tangente et normale en $x = a$

Tangente : passe par $(a, f(a))$, de pente $f'(a)$:

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a).$$

Normale : perpendiculaire à la tangente en ce point. Si $f'(a) \neq 0$:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}\,(x - a).$$

Si $f'(a) = 0$: tangente $y = f(a)$, normale verticale $x = a$.

Méthode

Calculer (1) $f(a)$, (2) $f'(x)$ puis $f'(a)$, (3) remplacer et simplifier sous la forme $y = mx + p$.

Problèmes types (l'inconnue est le point de contact a) :

— tangente **horizontale** : résoudre $f'(x) = 0$;
— tangente **parallèle** à une droite de pente m : résoudre $f'(x) = m$;
— tangente **perpendiculaire** à une droite de pente $m \neq 0$: résoudre $f'(x) = -\dfrac{1}{m}$;
— tangente qui **passe par un point donné** (pas forcément sur la courbe) : écrire la tangente en a, puis imposer que le point la vérifie.

Exemple : $f(x) = x^2$, $a = 1$

$f(1) = 1$, $f'(x) = 2x$, $f'(1) = 2$.
Tangente : $y = 1 + 2(x - 1)$, soit $y = 2x - 1$.
Normale : pente $-\frac{1}{2}$, d'où $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

5. Dérivabilité et continuité

Théorème

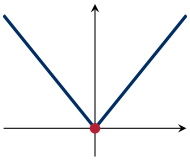
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Preuve. Pour $x \neq a$:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) \cdot 0 = 0.$$

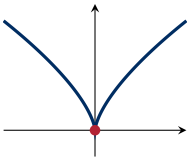
Attention

Contraposée : si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a.
La réciproque est fausse : une fonction peut être continue sans être dérivable (coin, pointe, tangente verticale).

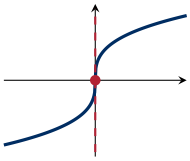
Coin : $|x|$



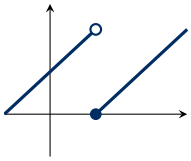
Pointe : $x^{2/3}$



Tangente verticale : $\sqrt[3]{x}$



Saut (discontinuité)



Situation en a	**Continue ?**	**Dérivable ?**	**Exemple**
Courbe « lisse »	oui	oui	x^2 en 0
Coin : $f'_-(a) \neq f'_+(a)$	oui	non	$\|x\|$ en 0 (pentes -1 et 1)
Pointe : pentes $\to -\infty$ d'un côté, $+\infty$ de l'autre	oui	non	$x^{2/3}$ en 0
Tangente verticale : pentes $\to +\infty$ (ou $-\infty$) des deux côtés	oui	non	$\sqrt[3]{x}$ en 0 (tangente $x = 0$)
Saut, trou, asymptote	non	non	fonction par morceaux

Méthode – étudier la dérivabilité en a

(1) Vérifier la **continuité** en a : si f n'est pas continue en a, elle n'y est pas dérivable.

(2) Sinon, calculer les limites latérales du taux de variation :

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(3) f est dérivable en $a \iff$ ces deux limites existent, sont **finies** et **égales**.

Piège

Deux morceaux qui ont la **même pente** au point de raccord ne suffisent pas : il faut d'abord que la fonction soit **continue**.

Ex. : $f(x) = x+1$ si $x < 1$, $f(x) = x-1$ si $x \geq 1$. Les deux morceaux ont la pente 1, mais f fait un saut en 1 : elle n'y est pas dérivable.

À retenir

Dérivable = « on trace sans lever le crayon **et sans angle ni pointe ni partie verticale** ».