Chapitre 4 - Solutionnaire

La continuité

Mohamed Nouidha

Automne 2026

Comment utiliser ce solutionnaire

Essayez d'abord chaque exercice **seul**, puis comparez. Les réponses finales sont encadrées en vert. Pour étudier la continuité en un point, on vérifie **toujours** les trois conditions dans l'ordre, et on écrit chaque limite calculée : c'est aussi ce qui est attendu à l'examen.

1. Continuité en un point

Méthode – continuité en $x = a$

f est continue en a si et seulement si **(1)** $f(a)$ existe; **(2)** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe (limites à gauche et à droite finies et égales); **(3)** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

À une borne du domaine, on remplace la limite bilatérale par la limite du seul côté où f est définie.

Exercice 1 $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ *en* $x = -2$.

(1) $f(-2) = \dfrac{0}{0}$: $f(-2)$ **n'existe pas**.

(2) Pour $x \neq -2$: $\dfrac{x^2-4}{x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2$, donc $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(x-2) = -4$. La limite existe.

La condition (1) échoue : f n'est pas continue en -2 (trou au point $(-2,-4)$).

Exercice 2 $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$ *en* $x = 2$.

(1) $f(2) = \dfrac{6}{0}$: $f(2)$ **n'existe pas**.

(2) Le numérateur tend vers 6 et le dénominateur vers 0 :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+4}{x-2} = \frac{6}{0^-} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x+4}{x-2} = \frac{6}{0^+} = +\infty.$$

Les conditions (1) et (2) échouent : f n'est pas continue en 2 (asymptote verticale $x = 2$).

Exercice 3 $f(x) = x^2+1$ *si* $x \neq 2$, $f(2) = 4$, *en* $x = 2$.

(1) $f(2) = 4$ existe. **(2)** Près de 2 (sans être égal à 2), $f(x) = x^2+1$, donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2^2+1 = 5$. **(3)** $5 \neq 4$.

La condition (3) échoue : f n'est pas continue en 2.

Exercice 4 $f(x) = \sqrt{5-x}$ *en* $x = 5$ *(borne du domaine).*

Domaine : $5 - x \geq 0 \iff x \leq 5$, soit $]-\infty, 5]$: f n'est définie qu'à gauche de 5.

(1) $f(5) = \sqrt{0} = 0$. **(2)** $\lim\limits_{x\to 5^-} \sqrt{5-x} = \sqrt{0^+} = 0$. **(3)** $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 0 = f(5)$.

f est continue en 5 (continuité à gauche, la seule pertinente à cette borne).

Exercice 5 $f(x) = 2x - 1$ *si* $x < 3$, $f(x) = x + 2$ *si* $x \geq 3$, *en* $x = 3$.

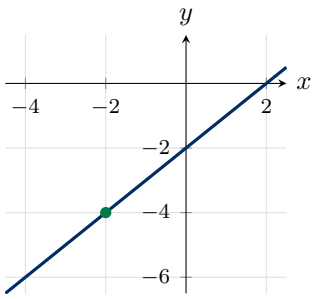
(1) $f(3) = 3 + 2 = 5$ (morceau qui inclut 3).
(2) $\lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 1) = 5$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} (x + 2) = 5$: les limites unilatérales sont égales, donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$.
(3) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5 = f(3)$. f est continue en 3 : les deux morceaux se raccordent au point $(3, 5)$.

Exercice 6 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *en* $x = 0$, *avec* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

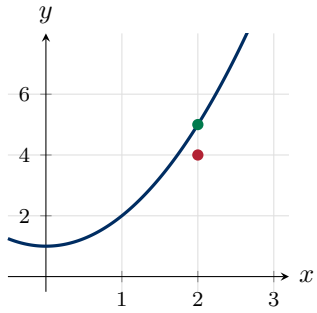
(1) $f(0)$ n'est pas défini. **(2)** La limite existe et vaut 1.
La condition (1) échoue : f n'est pas continue en 0 (trou au point $(0, 1)$).

Question de synthèse. Dans les cas 1, 3 et 6, la limite **existe** : le seul problème est la valeur de f au point (absente ou mauvaise). Il suffit de poser $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$:

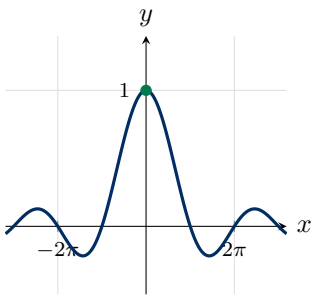
cas 1 : $f(-2) = -4$ cas 3 : $f(2) = 5$ (au lieu de 4) cas 6 : $f(0) = 1$



cas 1 : on bouche le trou



cas 3 : 4 → 5



cas 6 : on bouche le trou

Attention

Dans le cas 1, simplifier $\frac{x^2-4}{x+2}$ en $x - 2$ sert à **calculer la limite**; cela ne rend pas f continue. Les fonctions f et $x \mapsto x - 2$ ne sont pas égales : elles n'ont pas le même domaine.

2. Types de discontinuités

Exercice 1 $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ *en* $x = 5$.

$f(5) = \frac{0}{0}$ n'existe pas. Pour $x \neq 5$, $f(x) = \dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5} = x + 5$, donc $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 10$.
Discontinuité amovible, réparable en posant $f(5) = 10$.

Exercice 2 $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$ *en* $x = -1$.

$f(-1) = \frac{3}{0}$ n'existe pas, et $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$.
Discontinuité infinie, non réparable : aucune valeur réelle ne peut « boucher » une branche infinie.

Exercice 3 $f(x) = x^2$ *si* $x \leq 0$, $f(x) = x + 3$ *si* $x > 0$, *en* $x = 0$.

$f(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} (x+3) = 3$. Les limites unilatérales sont finies mais différentes : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas.
Discontinuité par saut (de hauteur 3), non réparable.

Remarque. f est continue *à gauche* en 0, puisque $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.

Exercice 4 $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ *si* $x \neq 2$, $f(2) = 3$, *en* $x = 2$.

$f(2) = 3$ existe. Pour $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$, donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 \neq 3$.

Discontinuité amovible, réparable en remplaçant $f(2) = 3$ par $f(2) = 4$.

Exercice 5 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ *en* $x = 2$.

Pour $1 \leq x < 2$, $\lfloor x \rfloor = 1$; pour $2 \leq x < 3$, $\lfloor x \rfloor = 2$. Donc $\lim\limits_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2$ et $f(2) = 2$.

Discontinuité par saut, non réparable. (f est continue *à droite* en 2.)

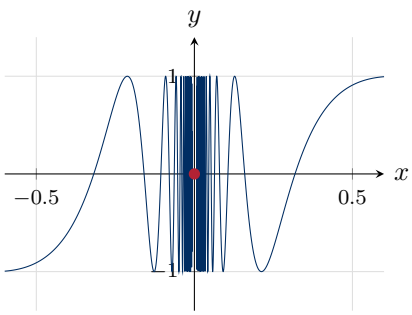
Exercice 6 $f(x) = \sin(1/x)$ *si* $x \neq 0$, $f(0) = 0$, *en* $x = 0$.

$f(0) = 0$ existe. Quand $x \to 0$, $\frac{1}{x} \to \pm\infty$ et $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ parcourt sans fin toutes les valeurs entre -1 et 1. Deux suites de points qui tendent vers 0 le montrent :

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \;\Rightarrow\; \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(n\pi) = 0,$$

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \;\Rightarrow\; \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = 1.$$

Aussi près de 0 qu'on veut, f prend la valeur 0 *et* la valeur 1 : elle ne se stabilise autour d'aucun nombre, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.



Graphe de $y = \sin(1/x)$

Discontinuité oscillante, non réparable.

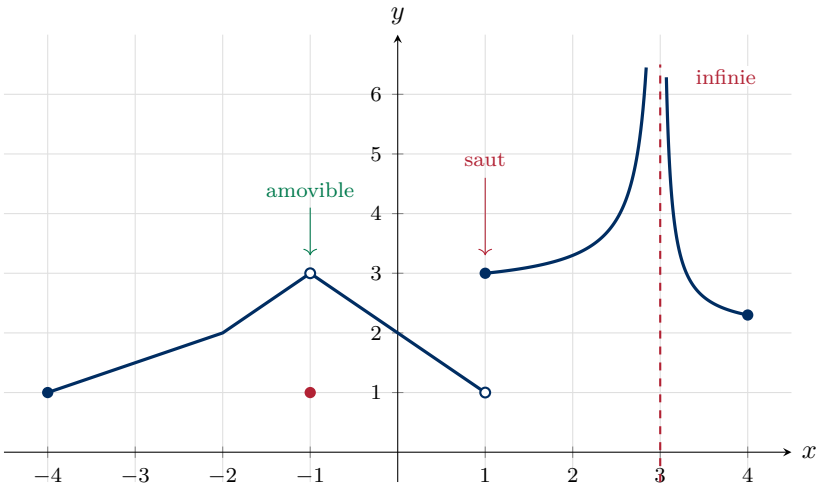
Le choix $f(0) = 0$ (ou toute autre valeur) n'y change rien.

Bilan de la partie 2

#	$f(a)$	**limites en** a	**Type**	**Réparable ?**
1	n'existe pas	10	amovible	oui : $f(5) = 10$
2	n'existe pas	$-\infty$ / $+\infty$	infinie	non
3	0	0 / 3	saut	non
4	3	4	amovible	oui : $f(2) = 4$
5	2	1 / 2	saut	non
6	0	n'existe pas	oscillante	non

3. Interprétation graphique

Exercice 1 — Le graphe mystère



1. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 3$, donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 3$; mais $f(-1) = 1$ (point plein rouge).

f n'est pas continue en -1 : discontinuité amovible, réparable en posant $f(-1) = 3$.

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ (cercle vide), $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$ et $f(1) = 3$ (cercle plein).

Discontinuité par saut, non réparable. (f est continue à droite en 1.)

3. $f(3)$ n'est pas défini (3 est exclu du domaine) et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$: les deux branches montent le long de l'asymptote verticale $x = 3$.

Discontinuité infinie, non réparable.

4. Aux bornes : $f(-4) = 1 = \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ et $f(4) = 2{,}3 = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$: f est continue (d'un côté) en -4 et en 4. Ailleurs, sauf en -1, 1 et 3, le graphe se trace sans lever le crayon.

$[-4, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 3[\cup]3, 4]$

Remarque. comme f est continue à droite en 1, on peut dire que f est continue *sur l'intervalle* $[1, 3[$; mais elle n'est pas continue *au point* 1.

5. Seulement en $x = -1$.

- En -1 : la limite existe (3); il suffit de déplacer le point plein de $(-1, 1)$ à $(-1, 3)$.
- En 1 : les limites à gauche (1) et à droite (3) diffèrent; une seule valeur $f(1)$ ne peut pas égaler deux nombres différents.
- En 3 : la limite est infinie; aucune valeur réelle $f(3)$ ne peut lui être égale.

Exercice 2 — Fonction en escalier

1. T est discontinue en $m = 1$, $m = 2$ et $m = 3$: discontinuités par saut (le tarif augmente d'un coup de 1 \$). En $m = 0$, $T(0) = 1 = \lim\limits_{m\to 0^+} T(m)$: T y est continue; $m = 4$ n'est pas dans le domaine.

2. Oui : le tarif est fixé par **tranches** de masse. Dès qu'on franchit un seuil, on change de tranche et le prix augmente d'un coup, sans valeurs intermédiaires.

3. $\lim\limits_{m\to 2^-} T(m) = 2$ et $\lim\limits_{m\to 2^+} T(m) = 3$.

4. En $m = 2$, le point **plein** est à la hauteur 3 (le cercle à la hauteur 2 est vide).
$\boxed{T(2) = 3 \text{ : le colis coûte } 3\,\$}$.

5. $T(2) = 3$ alors que $\lim\limits_{m \to 2^-} T(m) = 2$. Facturer avec cette limite reviendrait à demander 2 \$ au lieu de 3 \$: on **sous-facturerait de** 1 \$. La limite décrit le comportement de T *près* de 2 (pour des masses un peu inférieures à 2 kg), pas la valeur *en* 2.

Exercice 3 — Vrai ou faux (lecture graphique)

Graphe	(i)	(ii)	(iii)	Justification
(a)	V	V	V	point plein en $(a, 2)$; les deux côtés tendent vers $2 = f(a)$
(b)	V	F	F	$f(a) = 0{,}3$; limite 2 à gauche, 0,3 à droite : **saut**
(c)	F	V	F	seulement un cercle vide en a; les deux côtés tendent vers 2 : **amovible**

(i) $f(a)$ existe; (ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe; (iii) f est continue en a.

À retenir. Non : un angle n'empêche pas la continuité. Dans le graphe (a), les deux morceaux se rejoignent au même point $(a, f(a))$ et on trace le graphe sans lever le crayon. L'angle signale autre chose : il n'y a pas de tangente bien définie en a, ce qui posera un problème de **dérivabilité** (chapitre 5), pas de continuité. Exemple type : $|x|$ en 0.

Exercice 4 — Une discontinuité qui disparaît

1. Lecture : $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

$\boxed{\text{Discontinuité par saut, non réparable en changeant seulement } f(0).}$

2. On applique la valeur absolue aux trois nombres :

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = |-1| = 1, \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = |1| = 1, \qquad g(0) = |f(0)| = 1.$$

Les trois valeurs sont égales : $\boxed{g \text{ est continue en } 0}$.

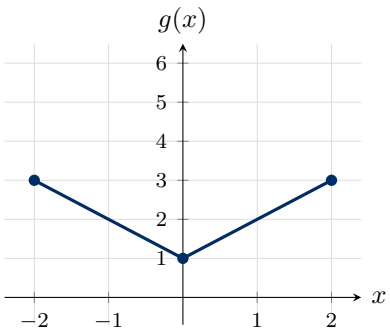
Esquisse : à gauche, le morceau de f (de $(-2, -3)$ à $(0, -1)$) est sous l'axe des x; la valeur absolue le **réfléchit** par rapport à cet axe, il va donc de $(-2, 3)$ à $(0, 1)$. À droite, $f \geq 0$ reste inchangée. Les deux morceaux se rejoignent en $(0, 1)$. (Vérification : $f(x) = x - 1$ à gauche et $x + 1$ à droite, donc $g(x) = 1 - x$ si $x < 0$, $g(x) = 1 + x$ si $x \geq 0$, soit $g(x) = 1 + |x|$.)

3. On multiplie les trois nombres par x, qui tend vers 0 :

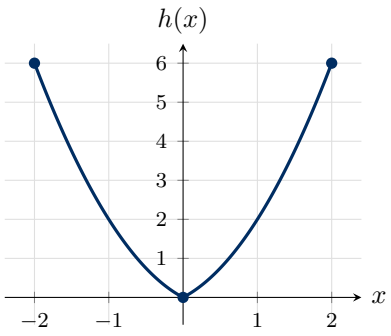
$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = 0 \cdot (-1) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} h(x) = 0 \cdot 1 = 0, \qquad h(0) = 0 \cdot f(0) = 0.$$

$\boxed{h \text{ est continue en } 0.}$

Explication graphique : le facteur x « écrase » le graphe vers 0 à l'approche de $x = 0$: les deux morceaux de f, qui arrivaient aux hauteurs -1 et 1, sont ramenés vers la hauteur 0 et se recollent à l'origine. (Ici $h(x) = x^2 - x$ si $x < 0$ et $h(x) = x^2 + x$ si $x \geq 0$.)



$g = |f|$: continue en 0



$h = xf$: continue en 0

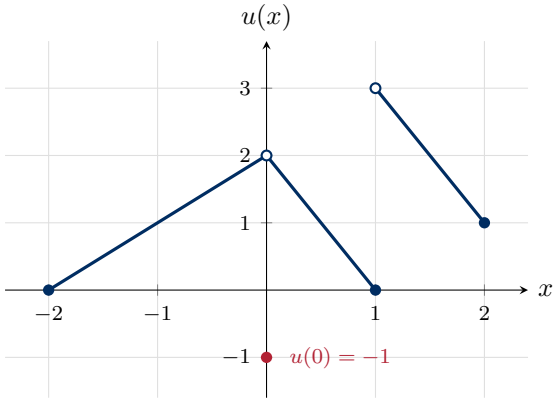
4. a) Faux. Contre-exemple : la fonction f de cet exercice est discontinue en 0, mais $|f| = g$ est continue en 0 (question 2). La valeur absolue peut « recoller » un saut entre deux valeurs opposées.

b) Faux. Contre-exemple : la même f en $a = 0$, avec $h(x) = xf(x)$ continue en 0 (question 3).

Remarque. l'implication inverse est vraie : si f est continue en a, alors $|f|$ et $x \mapsto xf(x)$ le sont aussi (composition et produit de fonctions continues).

Exercice 5 — Construire un graphe Plusieurs réponses sont possibles. En voici une, avec des segments de droite.

$$u(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \le x < 0 \\ -1 & x = 0 \\ 2-2x & 0 < x \le 1 \\ 5-2x & 1 < x \le 2 \end{cases}$$



Vérification :

— $\lim\limits_{x\to 0^-} u = 2 = \lim\limits_{x\to 0^+} u$ et $u(0) = -1$ ✓

— $\lim\limits_{x\to 1^-} u = 0 = u(1)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} u = 3$ ✓

— chaque morceau est un segment : u est continue partout ailleurs ✓

En $x = 0$: amovible, réparable en posant $u(0) = 2$.

En $x = 1$: saut, non réparable.

4. Domaine de continuité

Chaque fonction est construite à partir de fonctions continues : elle est continue partout où elle est définie, **sauf** aux éventuels points de raccordement d'une fonction par morceaux, qu'il faut vérifier à part.

Exercice 1 $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-x-6}$.

Dénominateur : $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \neq 0 \iff x \neq -2$ et $x \neq 3$.

$]-\infty, -2[\cup]-2, 3[\cup]3, +\infty[$

Remarque. le numérateur ne s'annule ni en -2 (il vaut -1) ni en 3 (il vaut 4) : rien ne se simplifie, et les deux discontinuités sont *infinies*.

Exercice 2 $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

$4 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2$. Les bornes sont **incluses** car $\sqrt{0} = 0$ est défini; en -2 et 2, g est continue d'un seul côté ($\lim_{x \to -2^+} g(x) = 0 = g(-2)$ et $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 0 = g(2)$).

$\boxed{[-2, 2]}$ (le graphe est le demi-cercle supérieur de rayon 2).

Exercice 3 $h(x) = \ln(5 - 2x)$.

$5 - 2x > 0 \iff x < \frac{5}{2}$. La borne $\frac{5}{2}$ est **exclue**, car $\ln 0$ n'est pas défini (et $\lim_{x \to 5/2^-} h(x) = -\infty$).

$\boxed{\left]-\infty, \tfrac{5}{2}\right[}$

Exercice 4 $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

Deux conditions : $x + 3 \geq 0$ (racine) **et** $\sqrt{x+3} \neq 0$ (dénominateur), donc $x + 3 > 0$. La borne -3 est **exclue** : la racine y vaut 0 et on diviserait par 0.

$\boxed{]-3, +\infty[}$

Exercice 5 $q(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

Il faut $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$ avec $x \neq -2$. Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$		0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x-1}{x+2}$	$+$		$\nexists$	$-$	0	$+$

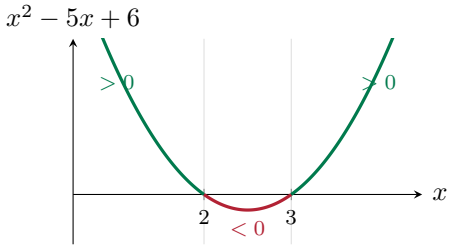
La borne 1 est **incluse** ($q(1) = \sqrt{0} = 0$); la borne -2 est **exclue** (division par 0).

$\boxed{]-\infty, -2[\cup [1, +\infty[}$

Exercice 6 $r(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

Il faut $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) > 0$. Cette parabole ouverte vers le haut est positive à l'extérieur de ses zéros : $x < 2$ ou $x > 3$. Les bornes 2 et 3 sont **exclues** ($\ln 0$ n'existe pas).

$\boxed{]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[}$



Exercice 7 $s(x) = \sqrt{x+1}$ *si* $x < 0$, $s(x) = x + 1$ *si* $x \geq 0$.

Domaine : pour $x < 0$, il faut $x + 1 \geq 0$, soit $-1 \leq x < 0$; pour $x \geq 0$, aucune restriction. Donc $\mathrm{Dom}\, s = [-1, +\infty[$.

Raccordement en 0 : $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x+1} = 1$, $\lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1$, $s(0) = 1$: continue.

Borne -1 : $s(-1) = 0 = \lim_{x \to -1^+} s(x)$: continue à droite.

$\boxed{[-1, +\infty[}$

Exercice 8 $t(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *si* $x \neq 1$, $t(1) = 0$.

Domaine : t est définie partout, $\mathrm{Dom}\, t = \mathbb{R}$ (la valeur en 1 est donnée à part).
Point $x = 1$ **:** pour $x \neq 1$, $t(x) = x + 1$, donc $\lim\limits_{x\to 1} t(x) = 2 \neq 0 = t(1)$: discontinuité amovible.

$\boxed{]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[}$

Remarque. ici, le domaine de définition et le domaine de continuité **diffèrent**.

5. Trouver un ou plusieurs paramètres

Dans chaque cas, les morceaux sont continus sur leurs intervalles : seuls les points de raccordement sont à étudier.

Exercice 1 $f(x) = 5x - k$ *si* $x \leq 1$, $f(x) = x^2 + 2$ *si* $x > 1$.

En $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 5 - k$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 + 2) = 3$. $5 - k = 3 \iff \boxed{k = 2}$.

Exercice 2 $f(x) = kx$ *si* $x < 2$, $f(x) = x^2 + k$ *si* $x \geq 2$.

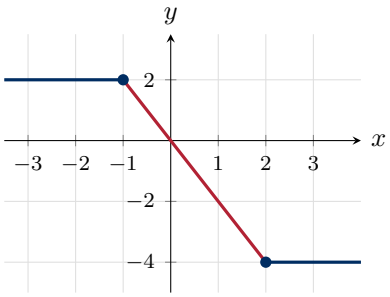
En $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2^-} kx = 2k$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 + k) = f(2) = 4 + k$. $2k = 4 + k \iff \boxed{k = 4}$. (Vérification : $2k = 8$ et $4 + k = 8$ ✓)

Exercice 3 $f(x) = 2$ *si* $x \leq -1$, $f(x) = ax + b$ *si* $-1 < x < 2$, $f(x) = -4$ *si* $x \geq 2$.

Deux paramètres, deux raccordements.

— **En** $x = -1$ **:** $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} (ax + b) = -a + b$: $-a + b = 2$.

— **En** $x = 2$ **:** $\lim\limits_{x\to 2^-} (ax + b) = 2a + b$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = -4$: $2a + b = -4$.



En soustrayant : $3a = -6$, donc $a = -2$, puis $b = 2 + a = 0$.
$\boxed{a = -2,\ b = 0}$: le morceau du milieu est $f(x) = -2x$, la droite qui relie $(-1, 2)$ et $(2, -4)$.

Exercice 4 $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ *si* $x \neq 3$, $f(3) = k$.

Pour $x \neq 3$, $\dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$, donc $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$. Il faut $f(3) = k = 6$: $\boxed{k = 6}$.

Exercice 5 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *si* $x \neq 0$, $f(0) = k$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; il faut donc $f(0) = k = 1$: $\boxed{k = 1}$.

Exercice 6 $f(x) = ax + b$ *si* $x \leq 0$, $f(x) = 3x - 1$ *si* $0 < x \leq 2$, $f(x) = 2x + a$ *si* $x > 2$.

— **En** $x = 0$ **:** $\lim\limits_{x\to 0^-} (ax + b) = f(0) = b$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (3x - 1) = -1$, d'où $b = -1$.

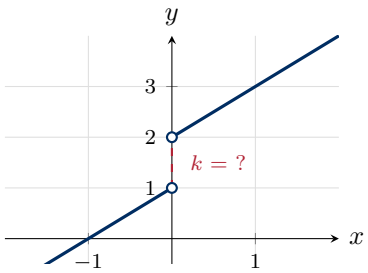
— **En** $x = 2$ **:** $\lim\limits_{x\to 2^-} (3x - 1) = f(2) = 5$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x + a) = 4 + a$, d'où $4 + a = 5$, $a = 1$.

$\boxed{a = 1,\ b = -1}$: $f(x) = x - 1$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 2x + 1$ si $x > 2$.

Remarque. ici, chaque raccordement détermine à lui seul un paramètre : pas besoin de résoudre un système.

Exercice 7 $f(x) = x+1$ *si* $x<0$, $f(0)=k$, $f(x)=x+2$ *si* $x>0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$. Les limites unilatérales sont différentes : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas, quelle que soit la valeur de k.



Aucune valeur de k ne convient : c'est une discontinuité par saut.
Un seul point $(0,k)$ ne peut pas relier deux hauteurs différentes.

Exercice 8 $f(x)=x+2$ *si* $x<2$, $f(x)=ax+b$ *si* $2\le x<4$, $f(x)=\sqrt{x+5}$ *si* $x\ge 4$.

— **En $x=2$:** $\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}(ax+b)=f(2)=2a+b$: $2a+b=4$.

— **En $x=4$:** $\lim\limits_{x\to 4^-}(ax+b)=4a+b$ et $\lim\limits_{x\to 4^+}\sqrt{x+5}=f(4)=\sqrt{9}=3$: $4a+b=3$.

En soustrayant : $2a=-1$, donc $a=-\frac{1}{2}$, puis $b=4-2a=5$. $\boxed{a=-\frac{1}{2},\ b=5}$ (Vérification : $-\frac{1}{2}\cdot 2+5=4$ ✓ et $-\frac{1}{2}\cdot 4+5=3$ ✓)

Exercice 9 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ *si* $x\ge -1$, $x\neq 0$, $f(0)=k$.

En $x=0$, la limite est de la forme $\frac{0}{0}$: on multiplie par le conjugué.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Il faut $f(0)=k=\frac{1}{2}$: $\boxed{k=\frac{1}{2}}$. (À la borne -1 : $f(-1)=\frac{0-1}{-1}=1=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$, aucun problème.)

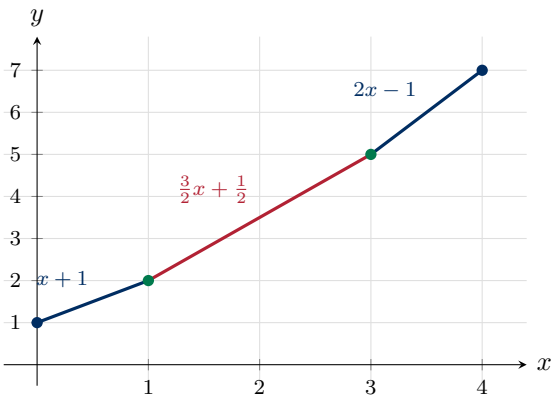
6. Exercices de synthèse

Exercice 1 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ *si* $x<1$, $f(1)=k$, $f(x)=ax+b$ *si* $1<x\le 3$, $f(x)=2x-1$ *si* $x>3$.

— **En $x=1$:** pour $x<1$, $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$; $f(1)=k$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$.
Conditions : $k=2$ et $a+b=2$.

— **En $x=3$:** $\lim\limits_{x\to 3^-}(ax+b)=f(3)=3a+b$ et $\lim\limits_{x\to 3^+}(2x-1)=5$. Condition : $3a+b=5$.

Résolution : $(3a+b)-(a+b)=5-2$, donc $2a=3$, $a=\frac{3}{2}$, puis $b=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.
$\boxed{k=2,\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}}$: le morceau du milieu est $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$.



Graphe de f sur $[0,4]$: trois segments qui se raccordent en $(1,2)$ et $(3,5)$, sans trou ni saut.

Exercice 2 $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ *si* $x<2$, $g(2)=0$, $g(x)=x+2$ *si* $2<x<4$, $g(4)=6$, $g(x)=x-1$ *si* $x>4$.

— **En $x=2$:** pour $x<2$, $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$, donc $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)=4$, $g(2)=0$. La limite existe mais diffère de $g(2)$: discontinuité amovible.

— **En $x=4$:** $\lim\limits_{x\to 4^-}(x+2)=6$, $\lim\limits_{x\to 4^+}(x-1)=3$, $g(4)=6$. Les limites unilatérales diffèrent : discontinuité par saut (g est continue à gauche en 4).

— **Ailleurs**, chaque morceau est un polynôme (ou une fraction égale à un polynôme) : continu.

g est continue sur $]-\infty,2[\cup]2,4[\cup]4,+\infty[$.

Peut-on tout réparer en changeant seulement $g(2)$ et $g(4)$? Non.
En posant $g(2)=4$, on répare la discontinuité amovible en 2. Mais en 4, les deux morceaux arrivent aux hauteurs 6 et 3 : aucune valeur unique de $g(4)$ ne peut combler cet écart.

