Chapitres 4 et 5 - Exercices de révision

La continuité et la dérivée (partie 1)

Mohamed Nouidha

Automne 2026

A. Continuité

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité au(x) point(s) indiqué(s) en vérifiant explicitement que $f(a)$ existe, que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et que ces deux valeurs sont égales. En cas de discontinuité, préciser son **type** et dire si elle est **réparable** (si oui, donner la valeur qui la répare).

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ en $x=-1$ et en $x=1$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<2 \\ 2x-1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$ en $x=2$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{si } x\geq -4,\ x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=0 \end{cases}$ en $x=0$

Exercice 2 Déterminer le domaine de définition puis le domaine de continuité de chacune des fonctions suivantes. Exprimer les réponses en notation d'intervalles avec crochets.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x-1}$

b) $g(x) = \ln(x^2-4x)$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x<0 \\ \sqrt{4-x} & \text{si } 0\leq x\leq 4 \end{cases}$

Exercice 3 Déterminer, s'il en existe, la ou les valeurs des paramètres qui rendent chaque fonction continue sur son domaine.

a) $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x\leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1<x\leq 2 \\ x^2+2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} kx^2-1 & \text{si } x<1 \\ 3x+k & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

B. La dérivée : définition et règles

Exercice 4 Calculer $f'(x)$ à l'aide de la **définition** (règles de dérivation interdites). Préciser pour quelles valeurs de x la dérivée existe et comparer avec le domaine de f.

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

Exercice 5 Un mobile se déplace sur un axe ; sa position (en m) après t secondes est $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, pour $0 \le t \le 5$.

a) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre $t = 1$ et $t = 4$. Interpréter le résultat.

b) Déterminer la vitesse $v(t) = s'(t)$ et la factoriser.

c) À quels instants le mobile est-il immobile ?

d) Calculer $v(2)$ et interpréter son signe.

Exercice 6 Dériver chaque fonction et donner la réponse sans exposant négatif ni fractionnaire. Choisir la méthode la plus efficace.

a) $f(x) = 3x^4 - \dfrac{2}{x^2} + 5\sqrt{x}$

b) $f(x) = (x^2+1)(\sqrt{x} - 3)$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + \sqrt{x}}{x}$

Exercice 7 On sait que $u(1) = 2$, $u'(1) = -3$, $v(1) = 4$ et $v'(1) = 1$. Calculer :

a) $(u\,v)'(1)$

b) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(1)$

c) $(u^2 - 3v)'(1)$

C. Tangente

Exercice 8 Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $a = 0$. Donner l'équation sous la forme $y = mx + p$.

Exercice 9 Soit $f(x) = x^3 - 3x^2$. Trouver tous les points du graphe où la tangente est parallèle à la droite $y = 9x - 2$, et donner l'équation de chacune de ces tangentes.

D. Dérivabilité et continuité

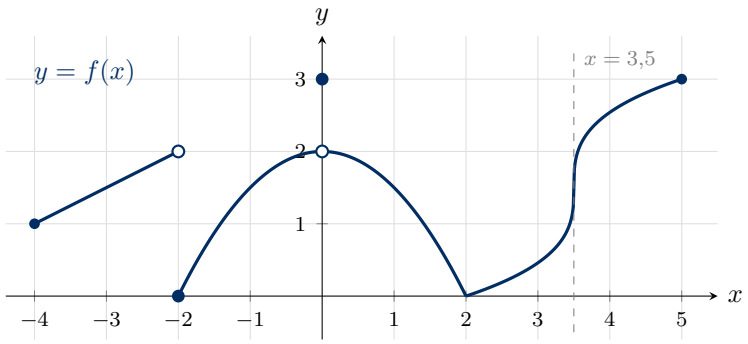
Exercice 10 Étudier la dérivabilité de chaque fonction au point indiqué. Si la fonction y est dérivable, donner la valeur de la dérivée en ce point ; sinon, décrire le graphe en ce point.

a) La fonction g de l'exercice 1 b), en $x = 2$.

b) $f(x) = x\,|x|$, en $x = 0$.

c) $h(x) = |x - 3|$, en $x = 3$.

Exercice 11 On donne le graphe d'une fonction f définie sur $[-4, 5]$.



a) Pour chacune des abscisses $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ et $x = 3{,}5$, dire si f est continue. En cas de discontinuité, en préciser le type.

b) Aux mêmes abscisses, dire si f est dérivable. Justifier à partir du graphe.

c) En $x = 0$, la courbe semble avoir une tangente horizontale. Pourquoi $f'(0)$ n'existe-t-elle pourtant pas ?

d) Déterminer le signe ($+$, $-$ ou 0) de $f'(x)$ en $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ et $x = 4{,}5$.

Exercice 12 ★ Déterminer a et b pour que la fonction

$$k(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue **et** dérivable en $x = 1$.

Exercice 13 **Vrai ou faux ?** Justifier (par un argument ou un contre-exemple).

a) Si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

b) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, alors f est dérivable en a.

c) Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

d) Si $f(a)$ existe et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, alors f est continue en a.

e) Si f n'est pas dérivable en a, alors le graphe de f présente un angle en a.

f) Si f et g sont discontinues en a, alors $f + g$ est discontinue en a.

g) Si f et g sont dérivables en a, alors $(fg)'(a) = f'(a)\, g'(a)$.

h) Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I, alors f n'a aucune discontinuité par saut sur I.