Révision des chapitres 4 et 5 - Solutionnaire

La continuité et la dérivée (partie 1)

Mohamed Nouidha

Automne 2026

Comment utiliser ce solutionnaire

Essayez d'abord chaque exercice **seul**, puis comparez. Les réponses finales sont encadrées en vert. La numérotation suit celle de la série de révision. Chaque solution est rédigée comme on l'attend à l'examen : lisez la **démarche**, pas seulement la réponse.

Bien rédiger une solution

1. **Annoncer** ce qu'on fait (« On étudie la continuité en $x = 2$ », « Règle du quotient avec $u = \dots$, $v = \dots$ ») et **conclure** par une phrase complète.
2. **Le bon symbole au bon endroit :** « $=$ » relie deux *quantités* égales ; « $\iff$ » relie deux *équations* équivalentes ; « $\Rightarrow$ » marque une *conséquence*. On n'écrit jamais $=$ entre deux équations.
3. **Garder « lim »** à chaque ligne tant que la variable n'a pas été remplacée ; on l'enlève au moment où l'on remplace.
4. **Pas d'écritures interdites :** $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $f(a) = \infty$ ne sont pas des calculs. On décrit en mots le comportement du numérateur et du dénominateur, puis on écrit la limite.
5. **Une lettre = un objet :** f (la fonction), $f(x)$ (un nombre), $f'(x)$ (la dérivée) ne sont pas interchangeables, et on ne réutilise pas une lettre déjà prise (si la fonction s'appelle h, l'accroissement ne s'appelle pas h).
6. **Préciser où le résultat est valable** ($x \neq \dots$, domaine) et noter les intervalles avec crochets : $]a, b[$, $[a, b]$.

A. Continuité

Rappel – continuité en un point (chapitre 4)

f est continue en a si : (1) $f(a)$ existe ; (2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe ; (3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Types de discontinuités : amovible (la limite existe, mais $f(a)$ n'existe pas ou en diffère : **réparable** en posant $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$) ; **par saut**, **infinie**, **oscillante** (essentielles : non réparables).

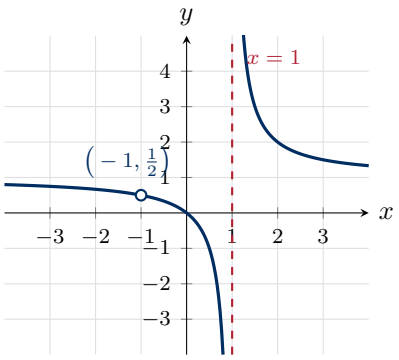
Exercice 1 *Continuité aux points indiqués ; type de discontinuité et réparabilité.*

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$. On factorise : $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x}{x-1}$ pour $x \neq \pm 1$.

En $x = -1$: $f(-1)$ n'existe pas (division par 0) : la condition (1) échoue. Forme $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

La limite existe : discontinuité amovible en $x=-1$, réparable en posant $f(-1)=\frac{1}{2}$.



En $x = 1$: $f(1)$ n'existe pas. Quand $x \to 1$, le numérateur de $\frac{x}{x-1}$ tend vers 1 et le dénominateur tend vers 0, avec $x-1<0$ à gauche et $x-1>0$ à droite. Donc

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty.$$

Discontinuité infinie en $x=1$ (asymptote verticale $x=1$), non réparable.

Remarque. la simplification par $(x+1)$ fait disparaître le problème en -1 (un trou), mais pas celui en 1 (le facteur $x-1$ reste au dénominateur).

b) (1) $g(2) = 2(2)-1 = 3$ (branche $x \geq 2$). (2) La règle change en $x=2$: on calcule les limites latérales.

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2-1) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x-1) = 3.$$

Les limites latérales sont égales, donc $\lim_{x\to 2} g(x) = 3$. (3) $\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$. Les trois conditions sont vérifiées : g est continue en $x=2$.

c) (1) $h(0) = \frac{1}{2}$ (2^{e} branche). (2) Pour $x \neq 0$, on a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$: on multiplie par le conjugué.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

(3) La limite existe, mais $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} = h(0)$: la condition (3) n'est pas vérifiée. Discontinuité amovible en $x=0$, réparable en redéfinissant $h(0)=\frac{1}{4}$.

Exercice 2 *Domaine de définition et domaine de continuité.*

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x-1}$. Conditions : $x+4 \geq 0$ (racine) et $x-1 \neq 0$ (dénominateur), soit $x \geq -4$ et $x \neq 1$.

$$\mathrm{Dom}(f) = [-4, 1[\cup]1, +\infty[.$$

f est un quotient de fonctions continues sur leur domaine ($\sqrt{x+4}$ continue sur $[-4,+\infty[$, polynôme $x-1$) : elle est continue partout où elle est définie. Domaine de continuité : $[-4, 1[\cup]1, +\infty[$. (En $x=-4$, borne du domaine, la continuité est à droite : $\lim_{x\to -4^+} f(x) = 0 = f(-4)$.)

b) $g(x) = \ln(x^2-4x)$. Condition : $x^2-4x>0$, soit $x(x-4)>0$.

x		0		4	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\mathrm{Dom}(g) = \boxed{]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[}$. Composée d'un polynôme et de ln (continue sur $]0, +\infty[$), g est continue sur tout son domaine : domaine de continuité $\boxed{]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[}$. (Les bornes 0 et 4 sont exclues : $\ln 0$ n'existe pas.)

c) **Domaine.** Branche $x < 0$: $\dfrac{1}{x+2}$ exige $x \neq -2$. Branche $0 \leq x \leq 4$: $4 - x \geq 0$ est toujours vrai. Au-delà de 4, h n'est pas définie.

$$\mathrm{Dom}(h) = \boxed{]-\infty, -2[\cup]-2, 4]}.$$

Continuité. Chaque branche est continue sur son intervalle ouvert. Il reste à étudier le point de raccord $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{4-x} = 2 = h(0).$$

Les limites latérales diffèrent : discontinuité **par saut** en 0. En $x = 4$ (borne) : $\lim\limits_{x\to 4^-} \sqrt{4-x} = 0 = h(4)$, continue à gauche.

$$\text{Domaine de continuité : } \boxed{]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, 4]}.$$

(En $x = -2$, hors du domaine, il y a une asymptote verticale : discontinuité infinie.)

Attention

Le domaine de continuité d'une fonction définie par parties n'est pas toujours égal à son domaine : il faut **toujours** vérifier les points de raccord.

Exercice 3 *Paramètres rendant la fonction continue sur son domaine.*

Méthode : chaque branche est un polynôme, donc continue. Seuls les points de raccord posent problème : on y impose « limite à gauche = limite à droite = valeur de la fonction ».

a) **En $x = -1$:** $f(-1) = -1 + 4 = 3$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} (ax + b) = -a + b$. Condition : $-a + b = 3$.

En $x = 2$: $f(2) = 2a + b$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 + 2) = 6$. Condition : $2a + b = 6$.

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{soustraction}} 3a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 1,\ \ b = 4}.$$

Vérification : en -1 : 3 et $-1 + 4 = 3$ ✓ en 2 : $2 + 4 = 6$ et $4 + 2 = 6$ ✓

b) **En $x = 1$:** $g(1) = 3 + k$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} (kx^2 - 1) = k - 1$. Continuité $\iff k - 1 = 3 + k \iff -1 = 3$: **impossible**.

$\boxed{\text{Aucune valeur de } k \text{ ne rend } g \text{ continue.}}$ Quel que soit k, l'écart entre les deux limites latérales vaut $(3 + k) - (k - 1) = 4$: il y a toujours un **saut** de hauteur 4 en $x = 1$.

Remarque. le paramètre k apparaît dans les deux branches avec le même coefficient en $x = 1$: il « s'annule » dans l'équation. C'est pourquoi l'énoncé dit « s'il en existe ».

B. La dérivée : définition et règles

Exercice 4 *Dérivée par la définition* $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$. **Méthode :** racine carrée ⇒ multiplier par le conjugué.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+5}-\sqrt{x+5}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+5}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+h+5}+\sqrt{x+5}} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+5)-(x+5)}{h\big(\sqrt{x+h+5}+\sqrt{x+5}\big)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\big(\sqrt{x+h+5}+\sqrt{x+5}\big)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+5}+\sqrt{x+5}} = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}.$$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}}$, qui existe pour $x+5>0$, c'est-à-dire $\boxed{x > -5}$.

Comparaison : $\mathrm{Dom}(f) = [-5,+\infty[$ mais f' n'existe que sur $]-5,+\infty[$. En $x=-5$ (extrémité du domaine), $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$: la tangente y est **verticale** (comme $\sqrt{x}$ en 0).

b) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$. **Méthode :** fraction ⇒ mettre au même dénominateur.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{x+h-3} - \frac{2}{x-3}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{2(x-3)-2(x+h-3)}{h\,(x+h-3)(x-3)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h\,(x+h-3)(x-3)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(x+h-3)(x-3)} = -\frac{2}{(x-3)^2}.$$

$\boxed{f'(x) = -\dfrac{2}{(x-3)^2}}$, qui existe pour $\boxed{x \neq 3}$: c'est exactement le domaine de f.

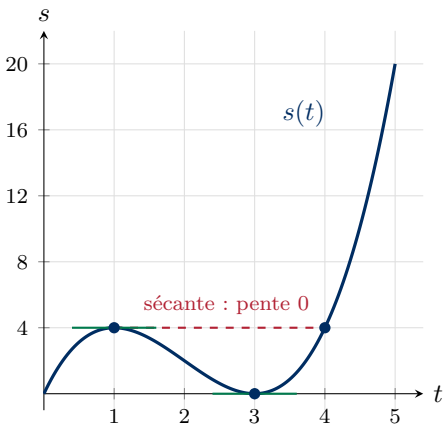
Vérification par les règles : $\big((x+5)^{1/2}\big)'$ demande la règle de la chaîne (partie 2) ; $\big(\frac{2}{x-3}\big)' = 2\cdot\big(-\frac{1}{(x-3)^2}\big)$ ✓

Exercice 5 *$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en m), $0 \le t \le 5$.*

a) $s(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ et $s(4) = 64 - 96 + 36 = 4$.

$$v_{\text{moy}} = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 4}{3} = \boxed{0 \text{ m/s}}.$$

Le mobile est à la **même position** (4 m) à $t = 1$ et à $t = 4$: son déplacement net est nul. Cela ne veut **pas** dire qu'il est resté immobile : il a reculé jusqu'à $s(3) = 0$, puis est revenu (voir le graphe).



En vert : tangentes horizontales ($v = 0$).

b) $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3)$, soit

$$\boxed{v(t) = 3(t-1)(t-3)} \text{ m/s}.$$

c) Le mobile est immobile lorsque sa vitesse est nulle :

$$v(t) = 0 \iff 3(t-1)(t-3) = 0 \iff t = 1 \text{ ou } t = 3.$$

Les deux valeurs sont dans $[0, 5]$: immobile à $\boxed{t = 1 \text{ s et } t = 3 \text{ s}}$.

d) $v(2) = 3(1)(-1) = \boxed{-3 \text{ m/s}}$. Le signe négatif signifie que la position **diminue** : à $t = 2$, le mobile se déplace dans le sens **négatif** de l'axe, à 3 m/s.

Exercice 6 *Dériver ; réponse sans exposant négatif ni fractionnaire.*

a) On réécrit : $f(x) = 3x^4 - 2x^{-2} + 5x^{1/2}$.

$$f'(x) = 12x^3 + 4x^{-3} + \tfrac{5}{2}x^{-1/2} = \boxed{12x^3 + \frac{4}{x^3} + \frac{5}{2\sqrt{x}}}.$$

b) **Méthode efficace :** développer (pas de quotient à gérer) : $f(x) = x^{5/2} - 3x^2 + x^{1/2} - 3$.

$$f'(x) = \tfrac{5}{2}x^{3/2} - 6x + \tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \boxed{\frac{5}{2}x\sqrt{x} - 6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

Vérification par la règle du produit : $2x(\sqrt{x}-3)+(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x}-6x+\dfrac{x\sqrt{x}}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ✓ (car $\frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2}$).

c) Le dénominateur n'est pas un monôme : **règle du quotient**, avec $u = x^2-1$, $v = x^2+4$, $u' = v' = 2x$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4) - (x^2-1)\,2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x\big[(x^2+4) - (x^2-1)\big]}{(x^2+4)^2} = \boxed{\frac{10x}{(x^2+4)^2}}.$$

d) Le dénominateur est un **monôme** : on simplifie terme à terme avant de dériver ($x > 0$).

$$f(x) = \frac{x^3}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{x^{1/2}}{x} = x^2 - 2 + x^{-1/2}, \qquad f'(x) = 2x - \tfrac{1}{2}x^{-3/2} = \boxed{2x - \frac{1}{2x\sqrt{x}}}.$$

Exercice 7 $u(1)=2,\ u'(1)=-3,\ v(1)=4,\ v'(1)=1.$

a) $(uv)'(1)=u'(1)v(1)+u(1)v'(1)=(-3)(4)+(2)(1)=-12+2=\boxed{-10}$

b) $\left(\frac{u}{v}\right)'(1)=\frac{u'(1)v(1)-u(1)v'(1)}{v(1)^2}=\frac{(-3)(4)-(2)(1)}{4^2}=\frac{-14}{16}=\boxed{-\frac{7}{8}}$

c) $u^2=u\cdot u$, donc par la règle du produit $(u^2)'=u'u+uu'=2uu'$. Ainsi

$$(u^2-3v)'(1)=2u(1)u'(1)-3v'(1)=2(2)(-3)-3(1)=-12-3=\boxed{-15}.$$

Attention

$(u^2)'\neq 2u$ et $(u^2)'(1)\neq (u'(1))^2$: on n'élève jamais une dérivée au carré « parce que la fonction est au carré ».

C. Tangente

Méthode : calculer (1) $f(a)$, (2) $f'(x)$ puis $f'(a)$, (3) remplacer dans $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ et simplifier sous la forme $y=mx+p$.

Exercice 8 $f(x)=\frac{2x-1}{x+1},\ a=0.$

(1) Point de tangence : $f(0)=\frac{-1}{1}=-1$, soit le point $(0,-1)$.

(2) Pente : règle du quotient avec $u=2x-1$, $v=x+1$, $u'=2$, $v'=1$:

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2},\quad x\neq -1,\qquad \text{donc}\qquad f'(0)=3.$$

(3) Équation : $y=f(0)+f'(0)(x-0)=-1+3x$. La tangente au point d'abscisse 0 est $\boxed{y=3x-1}$.

Exercice 9 $f(x)=x^3-3x^2$ *: tangentes parallèles à* $y=9x-2$.

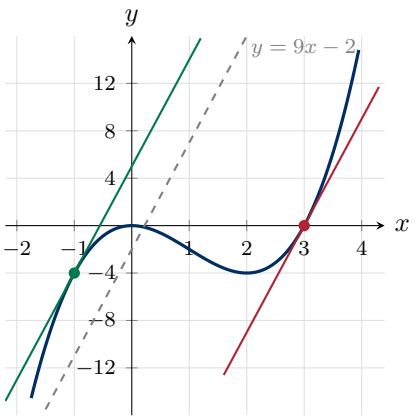
Deux droites sont parallèles $\iff$ elles ont la même pente.
On cherche donc les x tels que $f'(x)=9$:

$$3x^2-6x=9 \iff x^2-2x-3=0 \iff (x-3)(x+1)=0.$$

— $x=3$: $f(3)=27-27=0$. Point $\boxed{(3,0)}$, tangente $y=0+9(x-3)$, soit $\boxed{y=9x-27}$.

— $x=-1$: $f(-1)=-1-3=-4$. Point $\boxed{(-1,-4)}$, tangente $y=-4+9(x+1)$, soit $\boxed{y=9x+5}$.

Les deux tangentes ont la pente 9 et sont distinctes de $y=9x-2$ (ordonnées à l'origine différentes).



D. Dérivabilité et continuité

Méthode – étudier la dérivabilité en a

(1) Vérifier la **continuité** en a : si f n'est pas continue en a, elle n'y est pas dérivable (contraposée du théorème « dérivable ⇒ continue »).

(2) Si f est continue, calculer la limite du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, au besoin des deux côtés : $f'_-(a)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $f'_+(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

(3) f est dérivable en a si et seulement si ces deux limites existent, sont **finies** et **égales**.
Non dérivable : coin, pointe, tangente verticale, discontinuité.

Exercice 10 *Dérivabilité aux points indiqués.*

a) g **en** $x = 2$**.** (1) À l'exercice 1 b), g est continue en 2, avec $g(2) = 3$.
(2) À gauche, $g(2+h) = (2+h)^2 - 1 = 3 + 4h + h^2$; à droite, $g(2+h) = 2(2+h) - 1 = 3 + 2h$.

$$g'_-(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} (4 + h) = 4, \qquad g'_+(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2.$$

(3) $4 \neq 2$: g n'est pas dérivable en 2. Le graphe présente un **coin** en $(2, 3)$: demi-tangente de pente 4 à gauche, de pente 2 à droite.

b) $f(x) = x|x|$ **en** $x = 0$**.** $f(0) = 0$ et, pour $h \neq 0$,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\,|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$$

(même limite des deux côtés : inutile de les séparer). f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$: tangente **horizontale** $y = 0$ à l'origine.

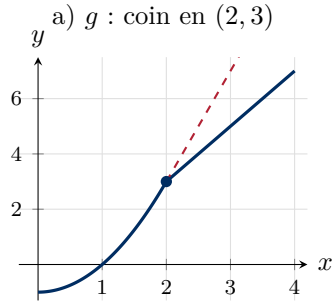
Remarque. $x|x| = x^2$ si $x \geq 0$ et $-x^2$ si $x < 0$. Les deux morceaux se raccordent avec la même pente 0 : la valeur absolue ne crée pas toujours un coin.

c) $h(x) = |x - 3|$ **en** $x = 3$**.** La fonction s'appelle déjà h : pour ne pas donner deux sens à la même lettre, on utilise la **2e forme** de la définition, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{h(x) - h(3)}{x - 3}$.
(1) $h(3) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 3} |x - 3| = 0 = h(3)$: h est continue en 3.
(2) Comme $|x - 3| = -(x - 3)$ si $x < 3$ et $|x - 3| = x - 3$ si $x > 3$:

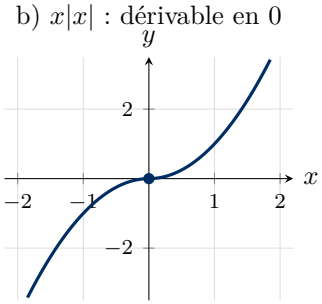
$$h'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1, \qquad h'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1.$$

(3) $-1 \neq 1$: h n'est pas dérivable en 3. Son graphe (celui de $|x|$ décalé de 3 vers la droite) forme un **coin** en $(3, 0)$.

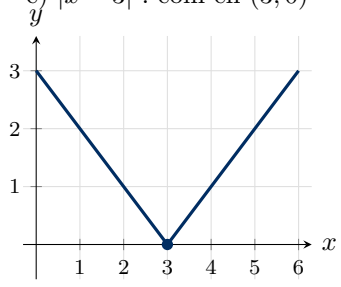
a) g : coin en $(2, 3)$



b) $x|x|$: dérivable en 0

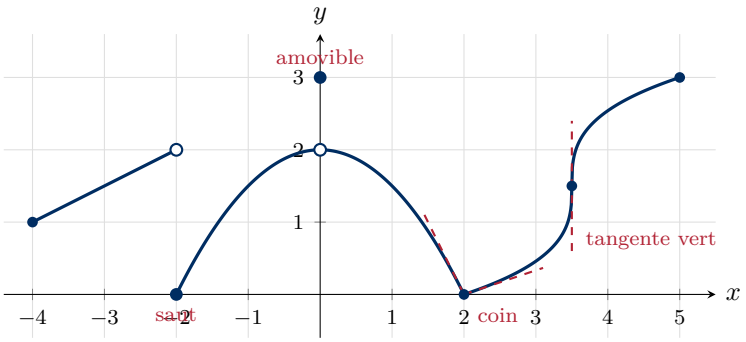


c) $|x - 3|$: coin en $(3, 0)$



En a), la tangente pointillée de pente 4 (celle de la parabole) ne suit pas la branche de droite, de pente 2 : c'est le coin.

Exercice 11 *Lecture du graphe de f sur $[-4,5]$.*



a) **Continuité.**

— $x=-2$: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$ et $f(-2)=0$ (point plein). Les limites latérales diffèrent : discontinuité par saut (essentielle, non réparable).

— $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ (le trou), mais $f(0)=3$ (point plein). La limite existe et diffère de $f(0)$: discontinuité amovible, réparable en posant $f(0)=2$.

— $x=2$: les deux morceaux se rejoignent en $(2,0)$: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0=f(2)$. f est continue en 2.

— $x=3{,}5$: la courbe passe par $(3{,}5\,;\,1{,}5)$ sans trou ni saut. f est continue en 3,5.

b) **Dérivabilité.**

— $x=-2$ et $x=0$: non dérivable, car f n'est pas continue (contraposée du théorème).

— $x=2$: non dérivable. f est continue, mais le graphe forme un **coin** : à gauche, la courbe descend avec une pente négative (≈ -2) ; à droite, elle remonte avec une faible pente positive. Les deux demi-tangentes (en rouge) n'ont pas la même pente.

— $x=3{,}5$: non dérivable. f est continue, mais la tangente est **verticale** (la droite $x=3{,}5$) : la pente des sécantes tend vers $+\infty$ et n'est pas un nombre réel.

c) Près de 0, la courbe est une parabole dont le sommet est le **trou** $(0,2)$: la tangente horizontale qu'on « voit » est celle de ce point, qui n'appartient pas au graphe. Or $f(0)=3$: f n'est pas continue en 0, donc $f'(0)$ n'existe pas. Par le calcul (sur le morceau, $f(x)=2-\frac{x^2}{2}$ près de 0) :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{(2-\frac{h^2}{2})-3}{h}=-\frac{1}{h}-\frac{h}{2},\quad \text{d'où}\quad \lim_{h\to 0^-}\Big(-\frac{1}{h}-\frac{h}{2}\Big)=+\infty,\ \lim_{h\to 0^+}\Big(-\frac{1}{h}-\frac{h}{2}\Big)=-\infty.$$

Les sécantes passent par le point « isolé » $(0,3)$ et deviennent verticales : elles ne tendent vers aucune tangente.

d) On lit le sens de variation (la courbe monte : $f'>0$; elle descend : $f'<0$) :

x	-3	-1	1	$4{,}5$
graphe	monte (segment)	monte	descend	monte
signe de $f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$

En $x=-3$, la pente est constante : c'est celle du segment, $\frac{2-1}{-2-(-4)}=\frac{1}{2}$.

Exercice 12 ★ *$k(x) = x^2 + a$ si $x \le 1$, $k(x) = \dfrac{b}{x}$ si $x > 1$: continue **et** dérivable en $x = 1$.*

1) Continuité (condition nécessaire) : $k(1) = 1 + a$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{b}{x} = b$. Il faut

$$1 + a = b.$$

2) Dérivabilité. À gauche :

$$k'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 + a - (1+a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} (2 + h) = 2.$$

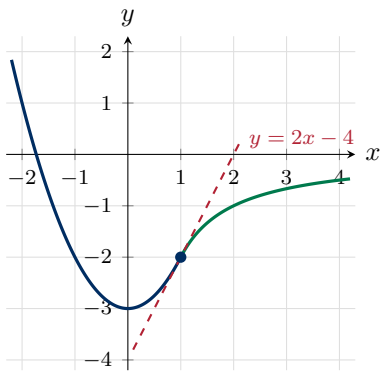
À droite, en utilisant $k(1) = 1 + a = b$:

$$k'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{b}{1+h} - b}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{b - b(1+h)}{h(1+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-bh}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-b}{1+h} = -b.$$

3) k est dérivable en $1 \iff k'_-(1) = k'_+(1) \iff 2 = -b \iff b = -2$. Avec $1 + a = b$, on obtient $a = b - 1 = -3$.

$$\boxed{a = -3,\ \ b = -2}$$

Vérification : $k(1) = 1 - 3 = -2 = \frac{-2}{1}$ ✓ pentes : $2x = 2$ et $\frac{2}{x^2} = 2$ en $x = 1$ ✓



Les deux morceaux se raccordent en $(1, -2)$ avec la même tangente : aucun coin.

Remarque. la condition de continuité doit être imposée **avant** le calcul de $k'_+(1)$: sans elle, le taux de variation à droite contiendrait un terme $\frac{b-(1+a)}{h}$ qui tend vers $\pm\infty$.

Exercice 13 **Vrai ou faux ?**

a) Vrai. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a (théorème du chapitre 5), donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

b) Faux. Contre-exemple : $h(x) = |x - 3|$ en $a = 3$ (exercice 10 c) : $\lim\limits_{x\to 3} |x - 3| = 0$ existe, mais h n'est pas dérivable en 3 (coin).

c) Faux. Même contre-exemple : $|x - 3|$ est continue en 3 sans y être dérivable. La réciproque du théorème est fausse.

d) Faux. Il manque la 3e condition : l'**égalité**. Contre-exemple : la fonction h de l'exercice 1 c) : $h(0) = \frac{1}{2}$ existe, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{4}$ existe, mais $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$ (aussi : $x = 0$ dans l'exercice 11).

e) Faux. Un angle (coin) n'est qu'une des causes. Contre-exemples : la tangente verticale de l'exercice 11 en $x = 3{,}5$ (ou $\sqrt[3]{x}$ en 0), et toute discontinuité, comme le saut en $x = -2$ de l'exercice 11.

f) Faux. Contre-exemple : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$. Les deux ont un saut en 0, mais $(f + g)(x) = 1$ pour tout x : $f + g$ est continue en 0 (les sauts se compensent).

g) Faux. La règle du produit est $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Contre-exemple : $f(x) = g(x) = x$, $a = 1$: $(fg)(x) = x^2$ donne $(fg)'(1) = 2$, alors que $f'(1)g'(1) = 1 \cdot 1 = 1$.

h) Vrai. Si f est dérivable en tout point de I, elle est continue en tout point de I (théorème). Elle n'a donc aucune discontinuité sur I, et en particulier aucun saut.