Chapitre 6 - Exercices

La dérivée (partie 2) : fonctions élémentaires, fonctions composées et règle de la chaîne

Mohamed Nouidha

Automne 2026

Consignes

Les angles sont toujours en **radians**. Sauf indication contraire, on suppose que x appartient au domaine de la fonction. Les exercices marqués ★ sont plus exigeants. Les réponses sont à la fin de la série.

A. Rappel de trigonométrie

À retenir

π rad $= 180°$ $\quad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$, $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $\quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x$

Exercice 1 Donner la valeur exacte.

a) $\sin \dfrac{5\pi}{6}$

b) $\cos \dfrac{4\pi}{3}$

c) $\tan \dfrac{3\pi}{4}$

d) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $\cos \dfrac{7\pi}{6}$

f) $\tan \dfrac{5\pi}{3}$

Exercice 2 Résoudre sur $[0, 2\pi]$.

a) $2\cos x = \sqrt{3}$

b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan x = \sqrt{3}$

d) $2\sin^2 x - 1 = 0$

e) $\sin x \cos x = 0$

Exercice 3 Simplifier à l'aide des identités.

a) $\dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$

b) $\tan x \cos x$

c) $\dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

d) $\sec^2 x - \tan^2 x$

B. Dérivées des fonctions élémentaires

À retenir

$(e^x)' = e^x$ $\quad (a^x)' = a^x \ln a$ $\quad (\sin x)' = \cos x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\quad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

Les règles de la partie 1 (somme, multiple constant, produit, quotient) s'appliquent à ces fonctions.

Exercice 4 Dériver.

a) $f(x) = 4x^3 - 2e^x + 7\ln x$
b) $f(x) = 3\sin x - 2\cos x + \tan x$
c) $f(x) = x^3 \sin x$
d) $f(x) = e^x \cos x$
e) $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$
f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$
g) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ (simplifier)
h) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$
i) $f(x) = x\tan x$
j) $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

Exercice 5 Chaque calcul ci-dessous est-il correct ? S'il est faux, nommer la règle mal appliquée et donner la dérivée correcte.

a) $(x^2\cos x)' = -2x\sin x$
b) $\left(\dfrac{1+\cos x}{x}\right)' = \dfrac{-\sin x}{1} = -\sin x$
c) $(\pi^2 + \ln x)' = 2\pi + \dfrac{1}{x}$
d) $(2\cos x - x)' = 2\sin x - 1$
e) $(x\,e^x)' = e^x(1+x)$

C. Fonctions composées

À retenir

$(h\circ g)(x) = h(g(x))$: on applique d'abord g (fonction **intérieure**), puis h (fonction **extérieure**). En général, $h\circ g \neq g\circ h$.

Exercice 6 Pour chaque fonction, identifier la fonction intérieure u et la fonction extérieure.

a) $(1-2x)^7$
b) $\sqrt{x^2+9}$
c) $e^{\cos x}$
d) $\ln(1+x^2)$
e) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
f) $\tan^3 x$
g) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$
h) $\cos(e^x)$

Exercice 7 Soit $f(x) = x^2+1$, $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \sin x$. Écrire, en simplifiant si possible :

a) $(f\circ g)(x)$
b) $(g\circ f)(x)$
c) $(h\circ f)(x)$
d) $(f\circ h)(x)$
e) $(h\circ g\circ f)(x)$

Exercice 8 Chaque fonction est la composée de **trois** fonctions. Les identifier, dans l'ordre où elles sont appliquées.

a) $e^{\sin(2x)}$
b) $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$
c) $\cos^3(4x)$
d) $\sqrt{\ln(x^2+1)}$

D. Règle de la chaîne

À retenir – règle de la chaîne

$\Big(h(g(x))\Big)' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

On dérive la fonction extérieure en **gardant l'intérieur intact**, puis on multiplie par la **dérivée de l'intérieur**.

$(u^n)' = n\,u^{n-1}u'$ $\quad (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\quad (e^u)' = e^u\,u'$ $\quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $\quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$ $\quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ $\quad (\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$

Exercice 9 Dériver chaque fonction.

a) $(2x^2-5)^3$ b) e^{4x+1} c) $\cos(x^3)$ d) $\ln(x^2+3x)$

Exercice 10 Puissances et racines. Dériver.

a) $f(x) = (4x-3)^5$

b) $f(x) = (x^3-2x)^4$

c) $f(x) = \sqrt{5-2x}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{3x-1}$

e) $f(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^3}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

g) $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$

Exercice 11 Exponentielles et logarithmes. Dériver.

a) e^{-3x} c) 5^{2x} e) $\ln(4x+1)$ g) $\ln(e^x+1)$

b) e^{x^2-x} d) $e^{1/x}$ f) $\ln(x^3+x)$ h) $\log_2(x^2+1)$

Exercice 12 Utiliser les propriétés du logarithme pour transformer l'expression, puis dériver. On suppose x dans le domaine.

a) $\ln\left((x+1)^3\right)$ b) $\ln\left(x^2\sqrt{3x+1}\right)$ c) $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)$ d) $\ln\left(x^2e^x\right)$

Exercice 13 Fonctions trigonométriques. Dériver.

a) $\sin(5x)$ c) $\tan(3x-1)$ e) $\cos^3 x$ g) $\sin(\ln x)$

b) $\cos(x^2+1)$ d) $\sin^2 x$ f) $\tan(e^x)$ h) $\sqrt{\cos x}$

Exercice 14 On connaît les valeurs suivantes de deux fonctions dérivables f et g.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	2	3	2	-1
2	1	-4	3	5

Calculer :

a) $F'(1)$ si $F(x) = f(g(x))$

b) $G'(1)$ si $G(x) = g(f(x))$

c) $H'(2)$ si $H(x) = \big(f(x)\big)^3$

d) $K'(1)$ si $K(x) = f(2x)$

e) $L'(2)$ si $L(x) = \sqrt{g(x)}$

f) $M'(1)$ si $M(x) = \ln\big(f(x)\big)$

Exercice 15 On ne connaît pas la fonction F, mais on sait que $F'(x) = \sqrt{1+x^3}$. Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $F(x^2)$ b) $F(\sin x)$ c) $F(e^x)$ d) $\big(F(x)\big)^2$

Exercice 16 Chaque calcul ci-dessous est-il correct ? S'il est faux, expliquer l'erreur et donner la dérivée correcte.

a) $\big((3x^2+1)^4\big)' = 4(3x^2+1)^3$

b) $\big(e^{x^2}\big)' = e^{2x}$

c) $\big(\ln(x^2+1)\big)' = \dfrac{1}{x^2+1}$

d) $\big(\cos(3x)\big)' = -3\sin x$

e) $\big(\sin(x^2)\big)' = \cos x \cdot 2x$

f) $\big(\sqrt{1-x^2}\big)' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 17 Dériver chaque fonction de deux façons : (i) avec la règle de la chaîne ; (ii) en simplifiant d'abord l'expression (ou, pour d), avec la règle du produit). Vérifier que les deux résultats coïncident.

a) $(x^2)^3$ b) $\ln(x^3)$, $x>0$ c) $e^{2x}\cdot e^x$ d) $\sin(2x)$

E. Compositions multiples

Exercice 18 Dériver.

a) $e^{\sin(2x)}$

b) $\sqrt{1+\cos^2 x}$

c) $\ln\big(\sin(3x)\big)$

d) $\cos^3(4x)$

e) $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

f) $\tan^2\big(\sqrt{x}\big)$

g) $\sqrt{\ln(x^2+1)}$

h) $\sin\big(\cos(x^2)\big)$

i) $e^{\sqrt{1+x^2}}$

F. Combiner les règles

Exercice 19 Dériver et simplifier.

a) $x^4 e^{-x^2}$

b) $x\sin(x^2)$

c) $e^{3x}\sin(2x)$

d) $\sqrt{x}\,\ln(2x+1)$

e) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$

g) $\ln\big(x\sqrt{x^2+1}\big)$, $x>0$

h) $\sqrt{x}\,\cos\big(\sqrt{x}\big)$

i) ★ $\ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$