Chapitre 6 - Solutionnaire

La dérivée (partie 2) : fonctions élémentaires, fonctions composées et règle de la chaîne

Mohamed Nouidha

Automne 2026

Comment utiliser ce solutionnaire

Essayez d'abord chaque exercice **seul**, puis comparez. Les réponses finales sont encadrées en vert. Ce qui compte n'est pas seulement le résultat : à l'examen, on attend que la démarche soit **écrite** — la règle utilisée est nommée, les fonctions u et v (ou intérieure et extérieure) sont identifiées, et chaque égalité est vraie. Les règles du chapitre 5 sont utilisées sans être redémontrées :

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (ku)' = ku', \qquad (uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

A. Rappel de trigonométrie

Méthode – valeur exacte d'un angle quelconque

(1) Placer l'angle sur le cercle trigonométrique et repérer son **quadrant**. (2) Trouver l'**angle de référence** (angle aigu avec l'axe des x). (3) Prendre la valeur remarquable de l'angle de référence, avec le **signe** du quadrant : cos = abscisse, sin = ordonnée, $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

Exercice 1 *Valeurs exactes.*

a) $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, quadrant II — $\sin\frac{5\pi}{6} = +\sin\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

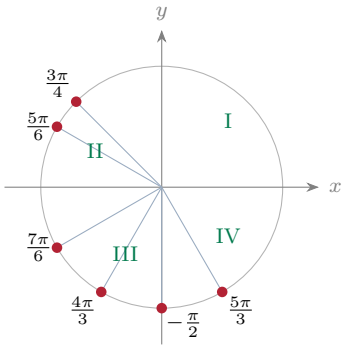
b) $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, quadrant III — $\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

c) $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$, quadrant II — $\tan\frac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \boxed{-1}$

d) $-\frac{\pi}{2}$: sens horaire, point $(0,-1)$ — $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{-1}$

e) $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, quadrant III — $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

f) $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$, quadrant IV — $\tan\frac{5\pi}{3} = \dfrac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = \boxed{-\sqrt{3}}$



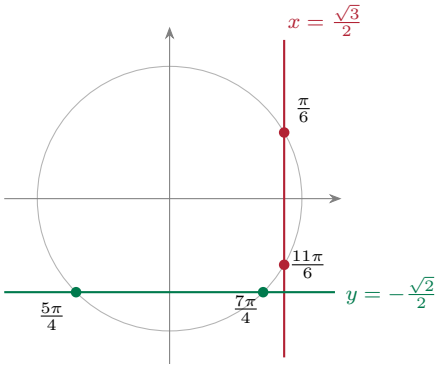
I : tout + ; II : sin > 0 ; III : tan > 0 ; IV : cos > 0.

Exercice 2 *Équations sur* $[0, 2\pi]$.

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Référence $\dfrac{\pi}{6}$; le cosinus est positif dans les quadrants I et IV : $\boxed{x = \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } x = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}}$

b) Référence $\dfrac{\pi}{4}$; le sinus est négatif dans les quadrants III et IV : $\boxed{x = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } x = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}}$

c) Référence $\dfrac{\pi}{3}$; la tangente est positive dans les quadrants I et III : $\boxed{x = \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}}$



a) en rouge : $\cos x$ est l'abscisse. b) en vert : $\sin x$ est l'ordonnée.

d) $2\sin^2 x - 1 = 0 \iff \sin^2 x = \dfrac{1}{2} \iff \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Référence $\dfrac{\pi}{4}$, dans les **quatre** quadrants : $\boxed{x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}}$

e) Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$\sin x \cos x = 0 \iff \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = 0.$$

Or $\sin x = 0 \iff x \in \{0, \pi, 2\pi\}$ et $\cos x = 0 \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Donc $\boxed{x = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi}$

Attention

En d), ne pas oublier le $\pm$ en prenant la racine carrée : on perdrait la moitié des solutions. En e), ne jamais **diviser** par $\sin x$ ou $\cos x$ (ils peuvent valoir 0) : on factorise et on utilise le produit nul.

Exercice 3 *Simplifier à l'aide des identités.*

a) Par l'identité de Pythagore, $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$. Donc $\dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x} = \boxed{\cos x}$ (là où $\cos x \neq 0$).

b) $\tan x \cos x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x = \boxed{\sin x}$ (là où $\cos x \neq 0$).

c) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$ (différence de carrés). Donc $\dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = \boxed{1 + \cos x}$ (là où $\cos x \neq 1$).

d) Comme $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$: $\sec^2 x - \tan^2 x = \boxed{1}$.

B. Dérivées des fonctions élémentaires

Exercice 4 *On repère d'abord l'opération principale (somme, produit ou quotient), puis on applique la règle du chapitre 5 avec les dérivées élémentaires.*

a) Somme : $f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 2e^x + 7 \cdot \dfrac{1}{x} = \boxed{12x^2 - 2e^x + \dfrac{7}{x}}$, $x > 0$.

b) Somme : $f'(x) = 3\cos x - 2(-\sin x) + \sec^2 x = \boxed{3\cos x + 2\sin x + \sec^2 x}$.

c) Produit : $u = x^3$, $v = \sin x$, $u' = 3x^2$, $v' = \cos x$. $f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x = \boxed{x^2(3\sin x + x\cos x)}$.

d) Produit : $u = e^x$, $v = \cos x$, $u' = e^x$, $v' = -\sin x$. $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = \boxed{e^x(\cos x - \sin x)}$.

e) Produit : $u = \sqrt{x}$, $v = \ln x$, $u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

$$f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \boxed{\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}} \qquad \text{car } \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

f) Quotient : $u = \ln x$, $v = x^2$, $u' = \dfrac{1}{x}$, $v' = 2x$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \boxed{\frac{1 - 2\ln x}{x^3}}, \quad x > 0.$$

g) Quotient : $u = \sin x$, $v = 1 + \cos x$, $u' = \cos x$, $v' = -\sin x$.

$$f'(x) = \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + \overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \boxed{\frac{1}{1 + \cos x}}.$$

h) Quotient : $u = e^x$, $v = 1 + e^x$, $u' = v' = e^x$. $f'(x) = \dfrac{e^x(1 + e^x) - e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} = \boxed{\dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}}$.

i) Produit : $u = x$, $v = \tan x$, $u' = 1$, $v' = \sec^2 x$. $f'(x) = \boxed{\tan x + x \sec^2 x}$.

j) Quotient : $u = 1 - \ln x$, $v = 1 + \ln x$, $u' = -\dfrac{1}{x}$, $v' = \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(1 + \ln x) - (1 - \ln x)\frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2} = \frac{-\frac{1}{x}(1 + \ln x + 1 - \ln x)}{(1 + \ln x)^2} = \boxed{\frac{-2}{x\,(1 + \ln x)^2}}.$$

Remarque. en g), l'identité $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ est ce qui permet de simplifier : penser aux identités dès qu'apparaissent $\sin^2$ et $\cos^2$.

Exercice 5 Trouver l'erreur.

a) **Faux.** On a calculé $u'v' = 2x \cdot (-\sin x)$: la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées. Règle du produit : $(x^2 \cos x)' = 2x \cos x + x^2(-\sin x) = \boxed{2x \cos x - x^2 \sin x}$.

b) **Faux.** On a calculé $\dfrac{u'}{v'}$: la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées. Règle du quotient avec $u = 1 + \cos x$, $v = x$:

$$\left(\frac{1 + \cos x}{x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot x - (1 + \cos x) \cdot 1}{x^2} = \boxed{-\frac{x \sin x + 1 + \cos x}{x^2}}.$$

c) **Faux.** $\pi^2 \approx 9{,}87$ est une **constante** : sa dérivée est 0 (et non 2π). $(\pi^2 + \ln x)' = \boxed{\dfrac{1}{x}}$.

d) **Faux.** Erreur de signe : $(\cos x)' = -\sin x$. $(2\cos x - x)' = \boxed{-2\sin x - 1}$.

e) Correct. $(x\,e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$.

C. Fonctions composées

Méthode – repérer la fonction extérieure

On imagine qu'on calcule $f(x)$ pour une valeur précise de x : la **dernière** opération effectuée est la fonction **extérieure** ; tout ce sur quoi elle agit (dans la parenthèse, sous la racine, dans l'exposant) est l'**intérieur** u.

Exercice 6 *Fonction intérieure et fonction extérieure.*

	Fonction	Intérieure u	Extérieure	Dernière opération
a)	$(1-2x)^7$	$1-2x$	u^7	puissance 7
b)	$\sqrt{x^2+9}$	x^2+9	$\sqrt{u}$	racine carrée
c)	$e^{\cos x}$	$\cos x$	e^u	exponentielle
d)	$\ln(1+x^2)$	$1+x^2$	$\ln u$	logarithme
e)	$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$\frac{1}{x}$	$\sin u$	sinus
f)	$\tan^3 x = (\tan x)^3$	$\tan x$	u^3	cube
g)	$\frac{1}{\sqrt{2x+5}} = (2x+5)^{-1/2}$	$2x+5$	$u^{-1/2}$	puissance $-\frac{1}{2}$
h)	$\cos(e^x)$	e^x	$\cos u$	cosinus

Piège de lecture

$\tan^3 x$ signifie $(\tan x)^3$: on calcule d'abord $\tan x$, puis on élève au cube. L'extérieure est donc le **cube**, et non la tangente. À comparer avec $\tan(x^3)$, dont l'extérieure est la tangente.

Remarque. en g), on peut aussi voir $\frac{1}{\sqrt{u}}$ comme extérieure. Écrire $u^{-1/2}$ est plus efficace pour dériver ensuite avec $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

Exercice 7 $f(x) = x^2+1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \sin x$.

On remplace la variable de la fonction extérieure par la fonction intérieure **tout entière**.

a) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = \boxed{x+1}$, pour $x \geq 0$ (domaine de g).

b) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \boxed{\sqrt{x^2+1}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) $(h\circ f)(x) = h(x^2+1) = \boxed{\sin(x^2+1)}$.

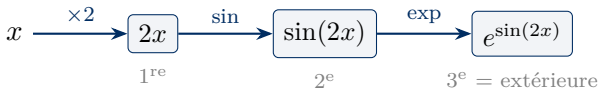
d) $(f\circ h)(x) = f(\sin x) = \boxed{\sin^2 x + 1}$.

e) $(h\circ g\circ f)(x) = h\Big(g(f(x))\Big) = h(\sqrt{x^2+1}) = \boxed{\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)}$.

Remarque. a) et b) donnent deux fonctions différentes : en général $f\circ g \neq g\circ f$, **l'ordre compte**. Même chose pour c) et d). En a), l'expression simplifiée $x+1$ a un sens pour tout x, mais $f\circ g$ n'est définie que pour $x \geq 0$.

Exercice 8 *Composées de trois fonctions, dans l'ordre où elles sont appliquées.*

On suit le calcul de $f(x)$ pour une valeur de x : la première opération est la couche la plus intérieure.



a) $\boxed{x \mapsto 2x \mapsto \sin(2x) \mapsto e^{\sin(2x)}}$ (multiplier par 2, sinus, exponentielle)

b) $\boxed{x \mapsto \sqrt{x} \mapsto 1+\sqrt{x} \mapsto \ln\left(1+\sqrt{x}\right)}$ (racine, ajouter 1, logarithme)

c) $\cos^3(4x) = \left(\cos(4x)\right)^3$: $\boxed{x \mapsto 4x \mapsto \cos(4x) \mapsto \left(\cos(4x)\right)^3}$ (multiplier par 4, cosinus, cube)

d) $\boxed{x \mapsto x^2+1 \mapsto \ln(x^2+1) \mapsto \sqrt{\ln(x^2+1)}}$ (polynôme, logarithme, racine)

D. Règle de la chaîne

Méthode en 3 étapes (notes, chapitre 6)

1. Décomposer : identifier l'intérieure u et l'extérieure. **2. Dériver chaque couche :** la dérivée de l'extérieure par rapport à u, et u'.

3. Assembler : $\Big(h(g(x))\Big)' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, puis remettre u en fonction de x et simplifier.

Exercice 9 *Dériver chaque fonction.*

On rédige ici les trois étapes en entier ; c'est le modèle à suivre.

a) Posons $u = 2x^2 - 5$; extérieure u^3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^3) = 3u^2$, $u' = 4x$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^2-5)^3 = 3(2x^2-5)^2 \cdot 4x = \boxed{12x\,(2x^2-5)^2}.$$

b) Posons $u = 4x+1$; extérieure e^u. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(e^u) = e^u$, $u' = 4$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{4x+1} = e^{4x+1} \cdot 4 = \boxed{4e^{4x+1}}$.

c) Posons $u = x^3$; extérieure $\cos u$. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\cos u) = -\sin u$, $u' = 3x^2$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x^3) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2 = \boxed{-3x^2\sin(x^3)}$.

d) Posons $u = x^2+3x$; extérieure $\ln u$. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\ln u) = \dfrac{1}{u}$, $u' = 2x+3$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2+3x) = \boxed{\dfrac{2x+3}{x^2+3x}}$, là où $x^2+3x > 0$.

Remarque. en b), on garde l'exposant $4x+1$ **intact** dans l'exponentielle : $(e^u)' = e^u \cdot u'$, l'exponentielle « se recopie », puis on multiplie par u'.

Exercice 10 **Puissances et racines.** *On réécrit racines et fractions sous forme de puissances, puis* $(u^n)' = n\,u^{n-1}\cdot u'$.

a) $u = 4x-3$, $u' = 4$: $f'(x) = 5(4x-3)^4 \cdot 4 = \boxed{20(4x-3)^4}$.

b) $u = x^3 - 2x$, $u' = 3x^2 - 2$: $f'(x) = \boxed{4(x^3-2x)^3(3x^2-2)}$.

c) $f(x) = (5-2x)^{1/2}$, $u' = -2$: $f'(x) = \frac{1}{2}(5-2x)^{-1/2}\cdot(-2) = \boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}}$, $x < \frac{5}{2}$.

d) $f(x) = (3x-1)^{1/3}$, $u' = 3$: $f'(x) = \frac{1}{3}(3x-1)^{-2/3}\cdot 3 = (3x-1)^{-2/3} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}}$, $x \neq \frac{1}{3}$.

e) $f(x) = 2(x^2+1)^{-3}$, $u' = 2x$: $f'(x) = 2\cdot(-3)(x^2+1)^{-4}\cdot 2x = \boxed{-\dfrac{12x}{(x^2+1)^4}}$.

f) $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $u' = -2x$: $f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x) = \boxed{\dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}}$, $-1 < x < 1$.

g) $u = 1 + \dfrac{1}{x} = 1 + x^{-1}$, $u' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$:

$$f'(x) = 3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \boxed{-\frac{3(x+1)^2}{x^4}}, \quad x \neq 0.$$

Attention

En e), la règle du quotient fonctionne aussi, mais elle est plus longue : quand le numérateur est une **constante**, on réécrit avec un exposant négatif. Et attention en c) : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; oublier $u' = -2$ donnerait $\dfrac{1}{2\sqrt{5-2x}}$, faux à la fois par le signe et par le facteur 2.

Exercice 11 **Exponentielles et logarithmes.** $(e^u)' = e^u u'$, $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

a) $u = -3x$, $u' = -3$: $\boxed{-3e^{-3x}}$

b) $u = x^2 - x$, $u' = 2x - 1$: $\boxed{(2x-1)\,e^{x^2-x}}$

c) Base $a = 5$, $u = 2x$, $u' = 2$: $5^{2x}\ln 5 \cdot 2 = \boxed{2\ln 5 \cdot 5^{2x}}$. (Vérification : $5^{2x} = 25^x$ et $(25^x)' = 25^x \ln 25 = 25^x \cdot 2\ln 5$ ✓)

d) $u = \dfrac{1}{x}$, $u' = -\dfrac{1}{x^2}$: $\boxed{-\dfrac{e^{1/x}}{x^2}}$, $x \neq 0$.

e) $u = 4x+1$, $u' = 4$: $\boxed{\dfrac{4}{4x+1}}$, $x > -\frac{1}{4}$.

f) $u = x^3 + x$, $u' = 3x^2 + 1$: $\boxed{\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}} = \dfrac{3x^2+1}{x(x^2+1)}$, $x > 0$.

g) $u = e^x + 1$, $u' = e^x$: $\boxed{\dfrac{e^x}{e^x+1}}$.

h) Changement de base : $\log_2(x^2+1) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln 2}$, et $\ln 2$ est une constante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_2(x^2+1) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} = \boxed{\frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}}.$$

Exercice 12 **Propriétés du logarithme.** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln\left(a^r\right) = r\ln a$ *(pour $a, b > 0$).*

a) $\ln\left((x+1)^3\right) = 3\ln(x+1)$ $(x > -1)$. Dérivée : $3\cdot\dfrac{1}{x+1} = \boxed{\dfrac{3}{x+1}}$.

b) Pour $x > 0$: $\ln\left(x^2\sqrt{3x+1}\right) = \ln x^2 + \ln(3x+1)^{1/2} = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(3x+1)$.

$$\text{Dérivée : } \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3x+1} = \frac{2\cdot 2(3x+1)+3x}{2x(3x+1)} = \boxed{\frac{15x+4}{2x(3x+1)}}.$$

c) Pour $x > \frac{1}{2}$: $\ln\dfrac{2x-1}{x+3} = \ln(2x-1) - \ln(x+3)$.

$$\text{Dérivée : } \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3)-(2x-1)}{(2x-1)(x+3)} = \boxed{\frac{7}{(2x-1)(x+3)}}.$$

d) Pour $x > 0$: $\ln\left(x^2e^x\right) = \ln x^2 + \ln e^x = 2\ln x + x$. Dérivée : $\dfrac{2}{x} + 1 = \boxed{\dfrac{x+2}{x}}$.

Remarque. sans simplifier, c) demande la règle de la chaîne **et** la règle du quotient : $\dfrac{x+3}{2x-1}\cdot\dfrac{2(x+3)-(2x-1)}{(x+3)^2}$, qui mène au même résultat après simplification. Transformer d'abord le logarithme évite ce calcul.

Exercice 13 **Fonctions trigonométriques.** $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$, $(\tan u)' = \sec^2 u\cdot u'$.

a) $u = 5x$: $\boxed{5\cos(5x)}$

b) $u = x^2+1$, $u' = 2x$: $-\sin(x^2+1)\cdot 2x = \boxed{-2x\sin(x^2+1)}$

c) $u = 3x-1$, $u' = 3$: $\boxed{3\sec^2(3x-1)}$

d) $\sin^2 x = (\sin x)^2$: extérieure u^2, $u = \sin x$. $2\sin x\cdot\cos x = \boxed{2\sin x\cos x} = \sin(2x)$.

e) $\cos^3 x = (\cos x)^3$: extérieure u^3, $u = \cos x$. $3\cos^2 x\cdot(-\sin x) = \boxed{-3\sin x\cos^2 x}$.

f) $u = e^x$, $u' = e^x$: $\boxed{e^x\sec^2(e^x)}$

g) $u = \ln x$, $u' = \dfrac{1}{x}$: $\boxed{\dfrac{\cos(\ln x)}{x}}$, $x > 0$.

h) $\sqrt{\cos x} = (\cos x)^{1/2}$, $u' = -\sin x$: $\frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}\cdot(-\sin x) = \boxed{-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}$, là où $\cos x > 0$.

Piège de lecture

$\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x$ mais $\left(\sin(x^2)\right)' = 2x\cos(x^2)$. Dans le premier cas, l'extérieure est le carré ; dans le second, c'est le sinus.

Exercice 14 *Tableau de valeurs de f, f', g, g' en $x = 1$ et $x = 2$.*

On écrit d'abord la dérivée **en fonction de** x avec la règle de la chaîne, puis on remplace.

a) $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Comme $g(1) = 2$: $F'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(2) \cdot g'(1) = (-4)(-1) = \boxed{4}$.

b) $G'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Comme $f(1) = 2$: $G'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 5 \cdot 3 = \boxed{15}$.

c) $H'(x) = 3(f(x))^2 \cdot f'(x)$, donc $H'(2) = 3 \cdot 1^2 \cdot (-4) = \boxed{-12}$.

d) $K'(x) = f'(2x) \cdot 2$, donc $K'(1) = 2f'(2) = 2(-4) = \boxed{-8}$.

e) $L'(x) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$, donc $L'(2) = \dfrac{5}{2\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{5\sqrt{3}}{6}}$.

f) $M'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, donc $M'(1) = \boxed{\dfrac{3}{2}}$.

Attention

En a), f' est évaluée en $g(1) = 2$, **pas** en 1 : on dérive l'extérieure en gardant l'intérieur intact. Écrire $f'(1) \cdot g'(1) = -3$ est l'erreur la plus fréquente. De même en d), c'est $f'(2 \cdot 1) = f'(2)$ qui intervient.

Exercice 15 *F est inconnue, mais $F'(x) = \sqrt{1 + x^3}$.*

La formule de F' vaut pour n'importe quelle valeur : $F'(u) = \sqrt{1 + u^3}$. On n'a jamais besoin de F elle-même pour dériver $F(u)$.

a) $u = x^2$: $\big(F(x^2)\big)' = F'(x^2) \cdot 2x = \sqrt{1 + (x^2)^3} \cdot 2x = \boxed{2x\sqrt{1 + x^6}}$.

b) $u = \sin x$: $\big(F(\sin x)\big)' = F'(\sin x) \cdot \cos x = \boxed{\cos x \sqrt{1 + \sin^3 x}}$.

c) $u = e^x$: $\big(F(e^x)\big)' = F'(e^x) \cdot e^x = \sqrt{1 + (e^x)^3} \cdot e^x = \boxed{e^x\sqrt{1 + e^{3x}}}$.

d) Ici, l'extérieure est le carré et l'intérieure est $F(x)$: $\Big(\big(F(x)\big)^2\Big)' = 2F(x) \cdot F'(x) = \boxed{2F(x)\sqrt{1 + x^3}}$.

Remarque. en d), $F(x)$ reste dans la réponse : on ne connaît pas F, et ce n'est pas nécessaire. Ce qu'on dérive, c'est le carré.

Exercice 16 **Trouver l'erreur.**

a) **Faux** : on a oublié de multiplier par $u' = 6x$. $\big((3x^2 + 1)^4\big)' = 4(3x^2 + 1)^3 \cdot 6x = \boxed{24x(3x^2 + 1)^3}$.

b) **Faux** : on a remplacé l'exposant x^2 par sa dérivée $2x$. L'exponentielle se recopie **telle quelle**, puis on multiplie par u'. $\big(e^{x^2}\big)' = e^{x^2} \cdot 2x = \boxed{2x\, e^{x^2}}$.

c) **Faux** : oubli de $u' = 2x$. $\big(\ln(x^2 + 1)\big)' = \boxed{\dfrac{2x}{x^2 + 1}}$.

d) **Faux** : l'intérieur n'a pas été gardé intact ($\sin x$ au lieu de $\sin(3x)$). $\big(\cos(3x)\big)' = -\sin(3x) \cdot 3 = \boxed{-3\sin(3x)}$.

e) **Faux** : on a dérivé comme un produit $\sin x \cdot x^2$. L'intérieur x^2 doit rester dans le cosinus. $\big(\sin(x^2)\big)' = \cos(x^2) \cdot 2x = \boxed{2x\cos(x^2)}$.

f) Correct. $\big(\sqrt{1 - x^2}\big)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Exercice 17 **Deux façons.**

a) (i) $u = x^2$: $3(x^2)^2 \cdot 2x = 6x^5$. (ii) $(x^2)^3 = x^6$, donc $6x^5$. $\boxed{6x^5}$ ✓

b) (i) $u = x^3$: $\dfrac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \dfrac{3}{x}$. (ii) $\ln(x^3) = 3\ln x$, donc $\dfrac{3}{x}$. $\boxed{\dfrac{3}{x}}$ ✓

c) (i) Règle du produit, avec $\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$ (chaîne) : $2e^{2x} \cdot e^x + e^{2x} \cdot e^x = 3e^{3x}$.
(ii) $e^{2x} \cdot e^x = e^{3x}$, donc $3e^{3x}$. $\boxed{3e^{3x}}$ ✓

d) (i) $u = 2x$: $\cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$.
(ii) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$; règle du produit : $2(\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos(2x)$, par l'identité $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. $\boxed{2\cos(2x)}$ ✓

Remarque. les deux méthodes donnent toujours le même résultat : c'est un bon moyen de **vérifier** un calcul. En général, la méthode la plus courte est celle qui simplifie d'abord.

E. Compositions multiples

On dérive « comme on épluche un oignon »

On repère les couches de l'extérieur vers l'intérieur ; **chaque couche donne un facteur** dans la dérivée. Chaque couche est dérivée en gardant intact tout ce qui est à l'intérieur d'elle.

Couches : $\boxed{e^{(\cdot)}} \longrightarrow \boxed{\sin(\cdot)} \longrightarrow \boxed{2x}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = e^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2$

$e^{\sin(2x)}$ $\cos(2x)$ 2

En rouge : la dérivée de chaque couche, évaluée en ce qui est à l'intérieur d'elle (exercice a).

Exercice 18 *Dériver.*

a) Couches : $\exp \to \sin \to 2x$. $f'(x) = e^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \boxed{2\cos(2x)\, e^{\sin(2x)}}$.

b) Couches : $\sqrt{\cdot} \to 1 + (\cdot)^2 \to \cos x$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) = \boxed{-\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}}.$$

c) Couches : $\ln \to \sin \to 3x$. $f'(x) = \dfrac{1}{\sin(3x)} \cdot \cos(3x) \cdot 3 = \boxed{3\cot(3x)}$, là où $\sin(3x) > 0$.

d) $\cos^3(4x) = \left(\cos(4x)\right)^3$. Couches : cube $\to$ cos $\to$ $4x$. $f'(x) = 3\cos^2(4x) \cdot (-\sin(4x)) \cdot 4 = \boxed{-12\cos^2(4x)\sin(4x)}$.

e) $f(x) = (1+e^{-x})^{-1}$. Couches : puissance $-1 \to 1 + e^{(\cdot)} \to -x$.

$$f'(x) = -(1+e^{-x})^{-2} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \boxed{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{(en multipliant haut et bas par } e^{2x}\text{)}.$$

f) $\tan^2(\sqrt{x}) = \left(\tan\sqrt{x}\right)^2$. Couches : carré $\to$ tan $\to \sqrt{x}$.

$$f'(x) = 2\tan(\sqrt{x}) \cdot \sec^2(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{\tan(\sqrt{x})\,\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}, \quad x > 0.$$

g) Couches : $\sqrt{\cdot} \to \ln \to x^2+1$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \boxed{\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}}}, \quad x \neq 0.$$

h) Couches : $\sin \to \cos \to x^2$. $f'(x) = \cos\big(\cos(x^2)\big) \cdot \big(-\sin(x^2)\big) \cdot 2x = \boxed{-2x\sin(x^2)\cos\big(\cos(x^2)\big)}$.

i) Couches : $\exp \to \sqrt{\cdot} \to 1+x^2$.

$$f'(x) = e^{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \boxed{\frac{x\,e^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

Remarque. en c), le domaine compte : $\ln\big(\sin(3x)\big)$ n'est définie que là où $\sin(3x) > 0$. En g), en $x = 0$ on a $\ln 1 = 0$ et la racine est au dénominateur.

F. Combiner les règles

Démarche (notes, chapitre 6)

1. **Simplifier** si possible (puissances, propriétés de ln). 2. Trouver l'**opération principale** (la dernière effectuée). 3. Appliquer la règle correspondante. 4. Pour chaque morceau qui reste à dériver, **recommencer** en 2. 5. **Simplifier / factoriser** le résultat.

Exercice 19 *Dériver et simplifier.*

a) **Produit** : $u = x^4$, $v = e^{-x^2}$, $u' = 4x^3$, $v' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$ (chaîne).

$$f'(x) = 4x^3e^{-x^2} + x^4 \cdot \big(-2x\,e^{-x^2}\big) = 4x^3e^{-x^2} - 2x^5e^{-x^2} = \boxed{2x^3(2-x^2)\,e^{-x^2}}.$$

b) **Produit** : $u = x$, $v = \sin(x^2)$, $u' = 1$, $v' = \cos(x^2) \cdot 2x$ (chaîne). $f'(x) = \boxed{\sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}$.

c) **Produit** : $u = e^{3x}$, $v = \sin(2x)$, $u' = 3e^{3x}$, $v' = 2\cos(2x)$. $f'(x) = 3e^{3x}\sin(2x) + 2e^{3x}\cos(2x) = \boxed{e^{3x}\big(3\sin(2x) + 2\cos(2x)\big)}$.

d) **Produit** : $u = \sqrt{x}$, $v = \ln(2x+1)$, $u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v' = \dfrac{2}{2x+1}$ (chaîne), $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{2x+1} = \boxed{\frac{(2x+1)\ln(2x+1) + 4x}{2\sqrt{x}\,(2x+1)}} \qquad \text{car } 2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x} = 4x.$$

e) **Quotient** : $u = x^2$, $v = \sqrt{1-x^2}$, $u' = 2x$, $v' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (chaîne), $-1 < x < 1$.

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2 \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{2x(1-x^2)+x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}}.$$

(À la 2e étape, on a multiplié le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{1-x^2}$.)

f) **Composition** : extérieure u^4, intérieure le quotient $u = \dfrac{1+x}{1-x}$.

$$u' = \frac{1\cdot(1-x) - (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}, \qquad f'(x) = 4\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}}, \ x \neq 1.$$

g) **Simplifier d'abord** $(x>0)$: $\ln\left(x\sqrt{x^2+1}\right) = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+x^2}{x(x^2+1)} = \boxed{\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}}.$$

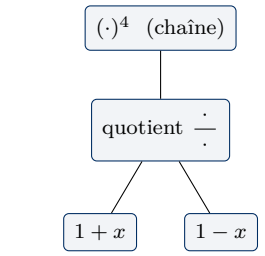
h) **Produit** : $u=\sqrt{x}$, $v=\cos\left(\sqrt{x}\right)$, $u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v' = -\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (chaîne).

$$f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\cdot\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin(\sqrt{x})}{2}}, \quad x>0.$$

i) ★ **Simplifier d'abord** : $\ln\dfrac{e^x}{1+e^x} = \ln e^x - \ln(1+e^x) = x - \ln(1+e^x)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = \boxed{\frac{1}{1+e^x}}.$$

Remarque. l'opération principale ne se voit pas toujours au premier coup d'œil. En f), la puissance 4 est appliquée en dernier : c'est une **composition**, même si l'intérieur est un quotient. L'arbre ci-contre montre l'ordre des règles : on lit de haut en bas, une règle par niveau. En g) et i), il n'y a pas d'opération principale à « attaquer » : simplifier avec les propriétés de ln transforme le problème en une somme.



Arbre de $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$ (exercice f).