Chapitre 7 - Exercices

La règle de l'Hôpital

Mohamed Nouidha

Automne 2026

Consignes

- Avant **chaque** application de la règle, vérifier et écrire la forme : $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
- Indiquer chaque application par $\overset{\text{H}}{=}$, et **simplifier** avant de substituer à nouveau.
- Pour les formes 0^0, 1^∞, ∞^0 : poser $h(x) = f(x)^{g(x)}$, calculer $L = \lim \ln h(x)$, puis conclure par e^L.
- Les exercices marqués $\star$ sont plus difficiles.

Partie A – Reconnaître la forme

Exercice 1 Identifier la forme de chaque limite. Si elle n'est **pas** indéterminée, donner la valeur de la limite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{\cos x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{1/x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$

Partie B – Formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes (forme $\frac{0}{0}$).

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(7x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

h) $\star$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$

Exercice 3 Calculer les limites suivantes (forme $\frac{\infty}{\infty}$).

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5}{2x^2-x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{e^x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x}{e^x+x^2}$

Partie C – Formes $0\cdot\infty$ et $\infty-\infty$

Exercice 4 Réécrire chaque produit sous la forme d'un quotient, puis calculer la limite.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} x^3\ln x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-2x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}$

f) ⋆ $\lim\limits_{x\to1^+} \ln x\,\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

Exercice 5 Transformer chaque différence (même dénominateur, conjugué ou propriétés du logarithme), puis calculer la limite.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(2x+1)-\ln x\right)$

e) ⋆ $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Partie D – Formes 0^0, 1^∞, ∞^0

Exercice 6 Identifier la forme, puis calculer la limite par la méthode du logarithme.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to0} (1+\sin x)^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x\to0} (e^x+x)^{1/x}$

d) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/\ln x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right)^{1/\ln x}$

g) ⋆ $\lim\limits_{x\to0^+} (\sin x)^{\tan x}$

Partie E – Problèmes

Exercice 7 Analyser chaque solution d'étudiant : repérer l'erreur, l'expliquer en une phrase, puis donner la bonne réponse.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{1} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2+x}\right)' = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+x)\cos x-(2x+1)\sin x}{(x^2+x)^2}\ \ldots$