Chapitre 7 - Exercices

La règle de l'Hôpital — Solutionnaire

Mohamed Nouidha

Automne 2026

Comment rédiger une solution

1. **Identifier la forme** en évaluant séparément la limite de chaque morceau, et l'écrire.
2. Si la forme est $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$: écrire $\overset{\text{H}}{=}$, dériver le numérateur et le dénominateur **séparément**.
3. **Simplifier**, puis **vérifier à nouveau la forme** avant toute nouvelle application.
4. Pour $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 : écrire explicitement la transformation en quotient.
5. Conclure par une égalité complète : $\lim\ldots = \text{valeur}$.

Partie A – Reconnaître la forme

Exercice 1 Identifier la forme ; si elle n'est pas indéterminée, donner la limite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}$

Numérateur : $e^0-\cos 0 = 1-1=0$. Dénominateur : $x\to 0$.

Réponse : forme $\frac{0}{0}$, indéterminée

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{\cos x}$

Numérateur : $0^2+1=1$. Dénominateur : $\cos 0 = 1$. La forme est $\frac{1}{1}$: elle n'est pas indéterminée, la substitution directe suffit.

Réponse : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{\cos x}=\frac{1}{1}=1$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$

$x^2\to+\infty$ et $e^{-x}\to 0$.

Réponse : forme $\infty\cdot 0$, indéterminée

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$

$\dfrac{1}{x}\to+\infty$ et $\ln x\to-\infty$, donc $-\ln x\to+\infty$. On additionne deux quantités qui tendent vers $+\infty$: la forme est $+\infty+\infty$.

Réponse : forme $+\infty-(-\infty)=+\infty$, pas indéterminée : la limite vaut $+\infty$

Attention

Ne pas confondre $\infty-(-\infty)$, qui vaut $+\infty$, avec la forme indéterminée $\infty-\infty$, où les deux termes tendent vers $+\infty$ et se font concurrence (comparer avec l'exercice 5 a).

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/x}$

Base : $\ln x\to+\infty$. Exposant : $\dfrac{1}{x}\to 0$.

Réponse : forme ∞^0, indéterminée

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1/x}$

Base : $x\to 0^+$. Exposant : $\dfrac{1}{x}\to+\infty$. La forme est $0^{+\infty}$: une base proche de 0 élevée à une puissance de plus en plus grande devient de plus en plus petite. Plus rigoureusement : $\ln\left(x^{1/x}\right)=\dfrac{\ln x}{x}$ est de la forme $\frac{-\infty}{0^+}$, donc tend vers $-\infty$, et $x^{1/x}=e^{\ln x/x}\to 0$.

Réponse : forme $0^{+\infty}$, pas indéterminée : la limite vaut 0

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

$\sqrt{x+1}\to+\infty$ et $\sqrt{x}\to+\infty$.

Réponse : forme $\infty-\infty$, indéterminée

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}$

$e^x\to+\infty$ et $\ln x\to+\infty$.

Réponse : forme $\frac{\infty}{\infty}$, indéterminée

Partie B – Formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Exercice 2 Forme $\frac{0}{0}$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$

En $x=3$: $9-6-3=0$ et $3-3=0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{2x-2}{1} = 2(3)-2 = 4$$

Réponse : 4

Remarque

Vérification par factorisation : $\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3} = x+1 \to 4$. Pour un quotient de polynômes, la factorisation est souvent aussi rapide.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

En $x=0$: $e^0-1=0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{1} = 3e^0 = 3$$

Réponse : 3

Attention

Règle de la chaîne : $\left(e^{3x}\right)' = 3e^{3x}$, et non e^{3x}.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sin(7x)}$

En $x=0$: $\sin 0 = 0$ au numérateur et au dénominateur. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sin(7x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4\cos(4x)}{7\cos(7x)} = \frac{4\cos 0}{7\cos 0} = \frac{4}{7}$$

Réponse : $\dfrac{4}{7}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2}$

En $x=0$: $1-\cos 0=0$ et $0^2=0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin(3x)}{2x}\quad(\text{forme }\tfrac{0}{0})\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{9\cos(3x)}{2}=\frac{9}{2}$$

Réponse : $\dfrac{9}{2}$

Remarque

Après la première application, on vérifie la forme : $3\sin 0=0$ et $2\cdot 0=0$, d'où la deuxième application.

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$

En $x=1$: $\ln 1=0$ et $1-1=0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

Réponse : $\dfrac{1}{2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$

En $x=0$: $2^0-1=0$. Forme $\frac{0}{0}$. On rappelle que $(a^x)'=a^x\ln a$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{1}=2^0\ln 2=\ln 2$$

Réponse : $\ln 2\approx 0{,}693$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

En $x=0$: $\tan 0-0=0$ et $0^3=0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}\quad(\text{forme }\tfrac{0}{0})$$

On simplifie avec l'identité $\sec^2 x-1=\tan^2 x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ est de la forme $\frac{0}{0}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1}=1$. Donc la limite vaut $\dfrac{1}{3}\cdot 1^2$.

Réponse : $\dfrac{1}{3}$

Remarque

On peut aussi appliquer la règle encore deux fois sans utiliser l'identité, mais les dérivées de $\sec^2 x$ deviennent vite lourdes. Une identité trigonométrique bien choisie raccourcit le calcul.

h ⋆) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$

En $x=0$: $\sqrt{1}-1-0=0$ et $0^2=0$. Forme $\frac{0}{0}$. On écrit $\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-1-\frac{x}{2}}{x^2}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}-\frac{1}{2}}{2x}$$

En $x=0$: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ et $2\cdot 0=0$. Encore la forme $\frac{0}{0}$:

$$\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}}{2}=\frac{-\frac{1}{4}}{2}=-\frac{1}{8}$$

Réponse : $-\dfrac{1}{8}$

Exercice 3 Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5}{2x^2-x}$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$. Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5}{2x^2-x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{4x-1}\quad(\text{forme }\tfrac{\infty}{\infty})\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Réponse : $\dfrac{3}{2}$

Remarque

Méthode algébrique : en divisant par x^2, $\dfrac{3+5/x^2}{2-1/x}\to\dfrac{3}{2}$. Les deux méthodes sont acceptables.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

$\ln x\to+\infty$ et $x^{1/3}\to+\infty$. Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1/3}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{2/3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^{1/3}}=0$$

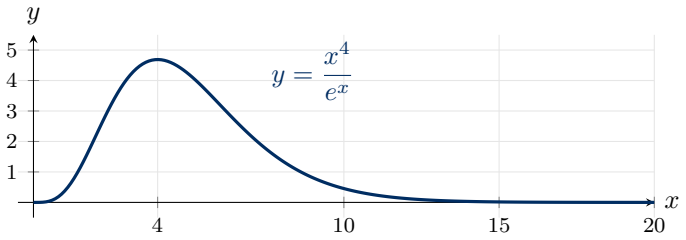
Réponse : 0 (le logarithme croît moins vite que toute puissance de x)

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}$

Forme $\frac{\infty}{\infty}$, qui le reste après chacune des trois premières applications :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^2}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{24x}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{24}{e^x}=0$$

Réponse : 0 (l'exponentielle croît plus vite que toute puissance de x)



Le quotient augmente d'abord, puis l'exponentielle l'emporte et il tend vers 0.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln x}$

$\ln(x^2+1) \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$. Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2$$

Réponse : 2

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On applique la règle en vérifiant la forme à chaque étape :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3(\ln x)^2}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x} = 0$$

Réponse : 0

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x}{e^x+x^2}$

Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{e^x+x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+2x} \quad (\text{forme } \tfrac{\infty}{\infty}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+2}$$

La forme est encore $\frac{\infty}{\infty}$, mais il est inutile d'appliquer la règle : on divise le numérateur et le dénominateur par e^x.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+2e^{-x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Réponse : 1

Partie C – Formes $0 \cdot \infty$ et $\infty - \infty$

Exercice 4 Produits : forme $0 \cdot \infty$.

Rappel

On envoie au dénominateur le facteur dont l'inverse se dérive simplement ; on garde $\ln x$ au numérateur.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln x$

$x^3 \to 0$ et $\ln x \to -\infty$: forme $0 \cdot (-\infty)$. On écrit $x^3 \ln x = \dfrac{\ln x}{x^{-3}}$, de la forme $\frac{-\infty}{+\infty}$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-3}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^4}{3x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^3}{3}\right) = 0$$

Réponse : 0

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\, e^{-2x}$

$x \to +\infty$ et $e^{-2x} \to 0$: forme $\infty \cdot 0$. On écrit $x\, e^{-2x} = \dfrac{x}{e^{2x}}$, de la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{2x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$$

Réponse : 0

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right)$

$x \to +\infty$ et $\tan\left(\frac{1}{x}\right) \to \tan 0 = 0$: forme $\infty \cdot 0$. On écrit $x = \dfrac{1}{1/x}$, d'où un quotient de la forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\tan(1/x)}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sec^2(1/x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sec^2\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^2 0 = 1$$

Réponse : 1

d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x$

Quand $x \to -\infty$: $x^2 \to +\infty$ et $e^x \to 0$: forme $\infty \cdot 0$. On écrit $x^2 e^x = \dfrac{x^2}{e^{-x}}$, de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ (car $e^{-x} \to +\infty$).

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \quad (\text{forme } \tfrac{-\infty}{-\infty}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Réponse : 0

Attention

$(e^{-x})' = -e^{-x}$: attention au signe donné par la règle de la chaîne.

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} \to +\infty$ et $e^{-\sqrt{x}} \to 0$: forme $\infty \cdot 0$. On écrit $\dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}$, de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Par la règle de la chaîne, $\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} = 0$$

Réponse : 0

f ⋆) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \ln x \, \tan\!\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Quand $x \to 1^+$: $\ln x \to 0^+$. De plus, $\frac{\pi x}{2} \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$, donc $\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \to -\infty$. Forme $0 \cdot (-\infty)$.

Comme $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$, on écrit $\dfrac{\ln x}{\cot(\pi x/2)}$; or $\cot\frac{\pi}{2} = 0$, donc la forme est $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to1^+} \frac{\ln x}{\cot(\pi x/2)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\pi}{2}\csc^2(\pi x/2)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}\cdot \csc^2\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}\cdot 1} = -\frac{2}{\pi}$$

Réponse : $-\dfrac{2}{\pi} \approx -0{,}637$

Exercice 5 Différences : forme $\infty - \infty$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$

$\dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $\ln x \to -\infty$: on additionne $+\infty$ et $-\infty$, c'est la forme indéterminée $\infty - \infty$. On met au même dénominateur :

$$\frac{1}{x} + \ln x = \frac{1 + x\ln x}{x}.$$

Le dénominateur tend vers 0^+. Au numérateur, $x\ln x$ est de la forme $0 \cdot (-\infty)$:

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+} (-x) = 0.$$

Le numérateur tend donc vers 1, et le quotient est de la forme $\frac{1}{0^+}$.

Réponse : $+\infty$

Remarque

Comparer avec l'exercice 1 d) : $\frac{1}{x} - \ln x$ n'était **pas** indéterminée. Ici, il faut un vrai calcul pour voir que $\frac{1}{x}$ l'emporte sur $\ln x$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$

Quand $x\to 0^+$, les deux termes tendent vers $+\infty$ (vers $-\infty$ quand $x\to 0^-$) : forme $\infty-\infty$. Avec $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$:

$$\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}\quad\text{(forme }\tfrac{0}{0}\text{)}$$

Dérivée du numérateur : $\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$. Dérivée du dénominateur : $\sin x+x\cos x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}\quad\text{(forme }\tfrac{0}{0}\text{)}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

Réponse : 0

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$

Forme $\infty-\infty$. L'expression contient une racine : on multiplie par le **conjugué**.

$$\sqrt{x^2+4x}-x=\frac{(x^2+4x)-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}.$$

Pour $x>0$, $\sqrt{x^2+4x}=x\sqrt{1+\frac{4}{x}}$. On divise par x :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

Réponse : 2

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2x+1)-\ln x\right)$

Forme $\infty-\infty$. On utilise $\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}$:

$$\ln(2x+1)-\ln x=\ln\frac{2x+1}{x}=\ln\left(2+\frac{1}{x}\right).$$

Comme $2+\frac{1}{x}\to 2$ et que ln est continue en 2 :

Réponse : $\ln 2$ (la règle de l'Hôpital n'est pas nécessaire)

e ⋆) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Quand $x\to 1^+$: $\dfrac{x}{\ln x}\to\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ et $\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$. Forme $\infty-\infty$. Même dénominateur :

$$\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}=\frac{x^2-x-\ln x}{(x-1)\ln x}\quad\text{(forme }\tfrac{0}{0}\text{)}$$

Dérivées : $(x^2-x-\ln x)'=2x-1-\dfrac{1}{x}$ et $\big((x-1)\ln x\big)'=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}$$

En $x = 1$: $2 - 1 - 1 = 0$ et $0 + 1 - 1 = 0$. Encore la forme $\frac{0}{0}$:

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Réponse : $\frac{3}{2}$

Partie D – Formes 0^0, 1^∞, ∞^0

Exercice 6 Méthode du logarithme.

Rappel de la méthode

Poser $h(x) = f(x)^{g(x)}$; alors $\ln h(x) = g(x) \ln f(x)$. Calculer $L = \lim \ln h(x)$, puis conclure : $\lim h(x) = e^L$.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

Base : $1 - \frac{2}{x} \to 1$. Exposant : $x \to +\infty$. Forme 1^∞.

$\ln h(x) = x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, de la forme $\frac{0}{0}$. Comme $\left(1 - \frac{2}{x}\right)' = \frac{2}{x^2}$:

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2/x^2}{1 - 2/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{1 - \frac{2}{x}} = -2$$

Réponse : $e^{-2} \approx 0{,}135$

b) $\lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{1/x}$

Base : $1 + \sin 0 = 1$. Exposant : $\frac{1}{x} \to \pm\infty$. Forme 1^∞.

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{1 + \sin x}}{1} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Réponse : $e^1 = e$

c) $\lim_{x \to 0} (e^x + x)^{1/x}$

Base : $e^0 + 0 = 1$. Exposant : $\frac{1}{x} \to \pm\infty$. Forme 1^∞.

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} = \frac{1+1}{1+0} = 2$$

Réponse : $e^2 \approx 7{,}39$

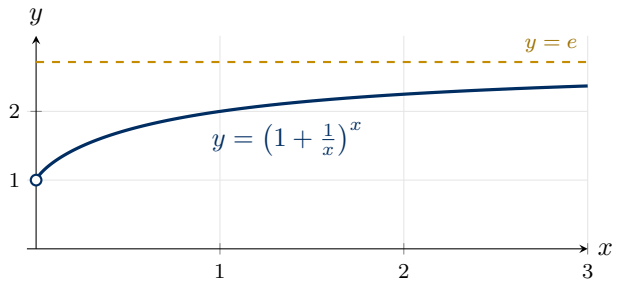
d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

Base : $1+\frac{1}{x}\to+\infty$. Exposant : $x\to 0^+$. Forme ∞^0.

$\ln h(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Comme $\left(1+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$:

$$L=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+1}=0$$

Réponse : $e^0=1$



Près de 0^+, la courbe part de 1 ; quand $x\to+\infty$, elle tend vers e (exemple 12 des notes).

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{1/\ln x}$

Base : $x\to+\infty$. Exposant : $\frac{1}{\ln x}\to 0$. Forme ∞^0.

$$\ln h(x)=\frac{1}{\ln x}\cdot\ln x=1\qquad\text{pour tout } x>1.$$

Donc $h(x)=e^1=e$ pour tout $x>1$: la fonction est constante.

Réponse : e

Remarque

Pas besoin de la règle de l'Hôpital : écrire $\ln h(x)$ suffit parfois à conclure.

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)^{1/\ln x}$

Base : $x^2+1\to+\infty$. Exposant : $\frac{1}{\ln x}\to 0$. Forme ∞^0.

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln x}=2\qquad\text{(exercice 3 d)}$$

Réponse : e^2

g ⋆) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

Base : $\sin x \to 0^+$. Exposant : $\tan x \to 0^+$. Forme 0^0.

$\ln h(x) = \tan x \, \ln(\sin x) = \dfrac{\ln(\sin x)}{\cot x}$, de la forme $\frac{-\infty}{+\infty}$.

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\cot x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos x}{\sin x}\cdot(-\sin^2 x)\right) = \lim_{x\to 0^+} (-\sin x \cos x) = 0$$

Réponse : $e^0 = 1$

Partie E – Analyse d'erreurs

Exercice 7 Repérer l'erreur, l'expliquer, donner la bonne réponse.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x+1} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{1} = 0$

Erreur. En $x = 0$, la forme est $\frac{0+1}{0+1} = \frac{1}{1}$: ce n'est pas une forme indéterminée, la règle de l'Hôpital ne s'applique pas.

Bonne solution. Substitution directe : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x+1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Réponse : 1

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$

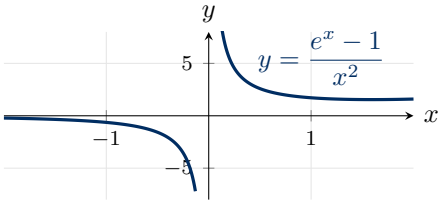
Erreur. La première application est correcte (forme $\frac{0}{0}$). Mais $\dfrac{e^x}{2x}$ est de la forme $\frac{1}{0}$ en $x = 0$: ce n'est **pas** une forme indéterminée, et la deuxième application est interdite.

Bonne solution. On étudie $\dfrac{e^x}{2x}$ des deux côtés de 0 : le numérateur tend vers 1, et

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Les limites à gauche et à droite sont différentes.

Réponse : la limite n'existe pas ($+\infty$ à droite, $-\infty$ à gauche)



Le graphe confirme : asymptote verticale en $x = 0$, avec des comportements opposés de chaque côté.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2+x}\right)' = \ldots$

Erreur. L'étudiant a dérivé le **quotient** (règle du quotient). La règle de l'Hôpital demande de dériver le numérateur et le dénominateur **séparément**. De plus, une limite ne se conserve pas quand on remplace une fonction par sa dérivée.

Bonne solution. En $x = 0$: $\sin 0 = 0$ et $0^2 + 0 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x+1} = \frac{\cos 0}{0+1} = 1$$

Réponse : 1

Remarque

Vérification sans la règle : $\displaystyle\frac{\sin x}{x^2+x} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x+1} \to 1\cdot 1 = 1.$