# Résumé du chapitre 6

Fonctions trigonométriques, logarithme et exponentielle, règle de la chaîne

Mohamed Nouidha

Automne 2026

## 1. Rappel : fonctions trigonométriques

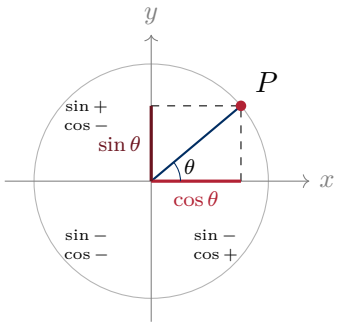
**Définitions – Radian et cercle trigonométrique**

Sur le cercle de rayon 1, **la mesure en radians d'un angle est la longueur de l'arc** intercepté : $\pi$ rad $= 180°$, donc $\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \cdot \dfrac{\pi}{180}$.

Le point $P$ du cercle associé à $\theta$ (sens antihoraire à partir de l'axe des $x$) est

$$P = (\cos\theta,\ \sin\theta), \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\cos\theta \neq 0).$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$




Signes selon le quadrant (quadrant I : tout positif). Ex. : $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (quadrant II, angle de référence $\frac{\pi}{3}$).

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan\theta$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | non déf. |

Astuce : $\sin\theta = \frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$ ; cos : même liste, dans l'ordre inverse.

**Méthode – résoudre $\sin x = c$, $\cos x = c$, $\tan x = c$**

(1) Trouver l'**angle de référence** avec le tableau.
(2) Repérer les **quadrants** où la fonction a le bon signe.
(3) Sur $\mathbb{R}$ : ajouter $2k\pi$ ($k\pi$ pour tan), $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. : $\sin x = \frac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$ : $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

**À connaître :** $\sin x = 0 \iff x = k\pi$ ; $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ces équations servent à trouver les **tangentes horizontales** ($f'(x) = 0$).

**Identités utiles**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$\cos(-x) = \cos x$ (paire)

$\sin(-x) = -\sin x$ (impaire)

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ $\qquad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

Périodes : $2\pi$ pour sin et cos, $\pi$ pour tan.

**Attention**

En calcul différentiel, les angles sont **toujours en radians** (calculatrice en mode RAD) : les formules de dérivation des fonctions trigonométriques sont fausses en degrés. $\tan x$ n'est pas définie si $\cos x = 0$, soit $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (asymptotes verticales).

## 2. Dérivées des fonctions élémentaires

### Tableau des dérivées usuelles (à connaître par cœur)

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $c$ | $0$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $x^n$ | $n\,x^{n-1}$ | $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x \ln a}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\tan x$ | $\sec^2 x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | | |

### D'où viennent ces formules

- $e \approx 2{,}718$ est la base dont la pente de la tangente en 0 vaut 1 ; $(e^x)' = e^x$ : **pente = hauteur**.
- $\ln x$ est la réciproque de $e^x$. $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ : ln est toujours croissante, de plus en plus lentement.
- $(\sin x)' = \cos x$ : les pentes de sin en 0, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ valent 1, 0, $-1$, c'est-à-dire $\cos 0$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos\pi$.
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et la **règle du quotient** donne $(\tan x)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

### Exponentielle et logarithme en base $a$ $\quad (a > 0,\ a \neq 1)$

**Exponentielle :** $a^x = e^{x \ln a}$, donc par la chaîne

$$(a^x)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

**Logarithme :** $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ $(x > 0)$, et $\ln a$ est une constante :

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Pour $a = e$ : $\ln e = 1$, on retrouve $(e^x)' = e^x$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

**Exemples :**

$(2^x)' = 2^x \ln 2 \qquad (10^x)' = 10^x \ln 10$

$(\log_{10} x)' = \dfrac{1}{x \ln 10} \qquad (\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$

$(x^2\,3^x)' = 2x\,3^x + x^2\,3^x \ln 3 = x\,3^x(2 + x \ln 3)$

**Attention :** $(2^x)' \neq x\,2^{x-1}$ (la variable est dans l'**exposant**) et $(\log_a x)' \neq \dfrac{1}{x}$ si $a \neq e$ : ne pas oublier le facteur $\ln a$.

### Exemples – fonctions élémentaires et règles de la partie 1

**Produit :** $f(x) = x^2 e^x$

$f'(x) = 2x\,e^x + x^2 e^x = x\,e^x(2 + x)$.

**Somme et multiples :** $f(x) = 4\cos x - 3e^x + \ln x$

$f'(x) = -4\sin x - 3e^x + \dfrac{1}{x}$.

**Quotient :** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

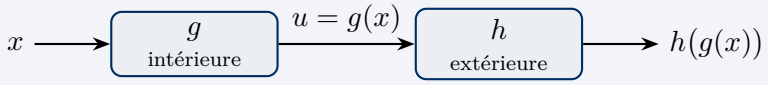
### Erreurs fréquentes

- $(e^x)' \neq x\,e^{x-1}$ : la règle de la puissance ne s'applique que si la variable est dans la **base**, pas dans l'exposant.
- $(\cos x)' = -\sin x$ : ne pas oublier le **signe**.
- $(x^3 \ln x)' \neq 3x^2 \cdot \frac{1}{x}$ : un produit se dérive avec la règle du produit, pas en multipliant les dérivées.
- $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ : le dénominateur est **au carré**.

## 3. Fonctions composées

**Définition – Fonction composée**

Une fonction est **composée** lorsqu'on applique une fonction au **résultat** d'une autre : $f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$.
$g$ est la fonction **intérieure** (appliquée en premier), $h$ est la fonction **extérieure** (appliquée en dernier).




L'ordre compte : avec $g(x) = 3x + 1$ et $h(x) = \sqrt{x}$, $(h \circ g)(x) = \sqrt{3x+1}$, mais $(g \circ h)(x) = 3\sqrt{x} + 1$.

**Méthode – repérer la fonction extérieure**

Imaginer qu'on calcule $f(x)$ pour une valeur précise de $x$ :

— la **dernière opération** effectuée est la fonction **extérieure** ;

— tout ce sur quoi elle agit (dans la parenthèse, sous la racine, dans l'exposant) est l'**intérieur**.

Ex. : $f(x) = \sin^2(3x)$. Pour $f(1)$ : $3 \cdot 1$, puis $\sin 3$, puis le **carré**. Donc $f = u^2$ avec $u = \sin(3x)$, elle-même composée.

| Fonction | Intérieure $u$ | Extérieure |
|---|---|---|
| $(2x-5)^4$ | $2x-5$ | $u^4$ |
| $\sqrt{1+x^2}$ | $1+x^2$ | $\sqrt{u}$ |
| $e^{3x}$ | $3x$ | $e^u$ |
| $\ln(5x-1)$ | $5x-1$ | $\ln u$ |
| $\sin(2x)$ | $2x$ | $\sin u$ |
| $\dfrac{1}{(x^3+1)^2}$ | $x^3+1$ | $u^{-2}$ |

**Pièges de lecture**

— $\sin^2 x = (\sin x)^2$ : extérieure $u^2$, $u = \sin x$.

— $\sin(x^2)$ : extérieure $\sin u$, $u = x^2$.

— $\sin^2 x \neq \sin(x^2)$ et $\ln^2 x \neq \ln(x^2)$.

En cas de doute, **écrire les parenthèses**.

— $\ln(x^2) = 2\ln x$ si $x > 0$ ; $\ln^2 x = (\ln x)^2$.

— $e^x + 1$ est une **somme**, pas une composée ; $e^{x+1}$ est une composée ($u = x+1$).

## 4. Règle de la chaîne

**Règle de la chaîne**

Si $g$ est dérivable en $x$ et $h$ dérivable en $g(x)$, alors

$$\Big(h(g(x))\Big)' = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Notation de Leibniz ($y = h(u)$, $u = g(x)$) :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

**En mots**

On dérive la fonction **extérieure** en **gardant l'intérieur intact**, puis on multiplie par la **dérivée de l'intérieur**.

**Intuition : les taux se multiplient.**

Si $u$ tourne 3 fois plus vite que $x$ et $y$ tourne 2 fois plus vite que $u$, alors $y$ tourne $3 \times 2 = 6$ fois plus vite que $x$.

**Ballon : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0{,}5$ cm/s**

$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2$. En $r = 10$ cm :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi(10)^2 \cdot 0{,}5$$

$$= 200\pi \approx 628 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

### Méthode en 3 étapes

Ex. : $f(x) = (x^2+1)^5$.

(1) **Décomposer :** intérieure $u = x^2+1$ ; extérieure $u^5$.

(2) **Dériver chaque couche :** $(u^5)' = 5u^4$ ; $u' = 2x$.

(3) **Assembler** (remettre $u$ en fonction de $x$) :

$$f'(x) = 5(x^2+1)^4 \cdot 2x = 10x\,(x^2+1)^4.$$

Inutile de développer : la chaîne donne une réponse **factorisée**, utile pour étudier le signe de $f'$.

### Vérification : $f(x) = (2x+1)^2$

En développant : $f(x) = 4x^2+4x+1$, $f'(x) = 8x+4$.
Avec la chaîne : $f'(x) = 2(2x+1)\cdot 2 = 8x+4$ ✓

### Erreurs fréquentes

- **Oublier $u'$ :** $\big((2x+1)^2\big)' \neq 2(2x+1)$.
- **Dériver l'intérieur dans l'extérieure :** $\big(\sin(x^2)\big)' \neq \cos(2x)$ ; c'est $\cos(x^2)\cdot 2x$.
- **Confondre avec le produit :** $\big(\sin(x^2)\big)' \neq \cos x \cdot 2x$.

### Familles de fonctions composées (le tableau usuel, avec un facteur $u'$ en plus)

| Fonction | Dérivée | Exemple | Fonction | Dérivée | Exemple |
|---|---|---|---|---|---|
| $u^n$ | $n\,u^{n-1}\,u'$ | $\big((3x-1)^5\big)' = 15(3x-1)^4$ | $\ln u \quad (u>0)$ | $\dfrac{u'}{u}$ | $\big(\ln(x^2+4)\big)' = \dfrac{2x}{x^2+4}$ |
| $\sqrt{u}$ | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $\big(\sqrt{1+4x}\big)' = \dfrac{2}{\sqrt{1+4x}}$ | $\log_a u \quad (u>0)$ | $\dfrac{u'}{u\ln a}$ | $\big(\log_2(3x+1)\big)' = \dfrac{3}{(3x+1)\ln 2}$ |
| $e^u$ | $e^u\,u'$ | $\big(e^{2x^2}\big)' = 4x\,e^{2x^2}$ | $\sin u$ | $\cos u \cdot u'$ | $\big(\sin(3x^2)\big)' = 6x\cos(3x^2)$ |
| $a^u$ | $a^u \ln a \cdot u'$ | $\big(10^{3x}\big)' = 3\ln 10 \cdot 10^{3x}$ | $\cos u$ | $-\sin u \cdot u'$ | $\big(\cos(4x)\big)' = -4\sin(4x)$ |
| | | $\big(5^{x^2}\big)' = 2x\ln 5 \cdot 5^{x^2}$ | $\tan u$ | $\sec^2 u \cdot u'$ | $\big(\tan\sqrt{x}\big)' = \dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ |

Si $u = x$, alors $u' = 1$ et on retrouve le tableau de base. En base $a$, on garde le facteur constant $\ln a$ : au numérateur pour $a^u$, au dénominateur pour $\log_a u$.

### Astuce – simplifier avec les propriétés du ln

Pour $x > -\frac{1}{2}$ : $\ln\sqrt{2x+1} = \frac{1}{2}\ln(2x+1)$,
donc $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{2x+1} = \dfrac{1}{2x+1}$.

Pour $x > 1$ : $\ln\dfrac{x+1}{x-1} = \ln(x+1) - \ln(x-1)$,
donc $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-2}{x^2-1}$.

### Exposant négatif ou fractionnaire : réécrire d'abord

$$f(x) = \frac{4}{(2x+1)^3} = 4(2x+1)^{-3}$$
$$f'(x) = 4\cdot(-3)(2x+1)^{-4}\cdot 2 = -\frac{24}{(2x+1)^4}.$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+5} = (x^2+5)^{1/3}$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{3}(x^2+5)^{-2/3}\cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+5)^2}}.$$

**Remarque :** $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ ne diffère de $\ln x$ que d'une constante : $\big(\ln(2x)\big)' = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x} = (\ln x)'$.

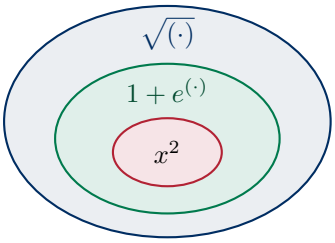
## 5. Compositions multiples et combinaison des règles

**Plusieurs couches : « on épluche un oignon »**

On dérive de l'extérieur vers l'intérieur : **une couche = un facteur**.

Ex. : $f(x) = \sqrt{1+e^{x^2}}$, couches : racine $\to 1+e^{(\cdot)} \to x^2$.

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+e^{x^2}}}}_{\text{racine}} \cdot \underbrace{e^{x^2}}_{\text{exp.}} \cdot \underbrace{2x}_{x^2} = \frac{x\,e^{x^2}}{\sqrt{1+e^{x^2}}}.$$




**Autres exemples à plusieurs couches**

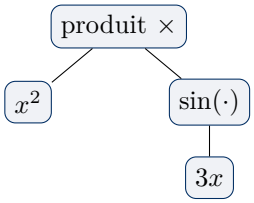
$f(x) = \sin^3(2x)$ (cube $\to$ sinus $\to 2x$) : $f'(x) = 3\sin^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2 = 6\sin^2(2x)\cos(2x)$.

$f(x) = \ln\big(\cos(x^2)\big)$ ($\ln \to$ cosinus $\to x^2$) : $f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x^2)}\cdot\big(-\sin(x^2)\big)\cdot 2x = -2x\tan(x^2)$ (là où $\cos(x^2) > 0$).

$f(x) = e^{\sqrt{3x+1}}$ (exp $\to$ racine $\to 3x+1$) : $f'(x) = e^{\sqrt{3x+1}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}\cdot 3 = \dfrac{3\,e^{\sqrt{3x+1}}}{2\sqrt{3x+1}}$ (pour $x > -\frac{1}{3}$).

**Stratégie générale**

(1) **Simplifier** si possible (puissances, propriétés du ln, $e^x\cdot e^{2x} = e^{3x}$).
(2) Trouver l'**opération principale** (la dernière effectuée) : somme, produit, quotient ou composition.
(3) Appliquer la règle correspondante.
(4) Pour chaque morceau qui reste à dériver, **recommencer** en (2).
(5) **Simplifier / factoriser** le résultat.




$f(x) = x^2\sin(3x)$ : $f'(x) = 2x\sin(3x) + x^2\cdot\underbrace{3\cos(3x)}_{\text{chaîne}}$

**Chaîne + produit, chaîne + quotient**

$f(x) = x^2e^{3x}$ (produit ; $(e^{3x})' = 3e^{3x}$ par la chaîne)
$f'(x) = 2x\,e^{3x} + x^2\cdot 3e^{3x} = x\,e^{3x}(2+3x)$.

$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$ (produit)
$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

$f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$ (chaîne, l'intérieur est un quotient)
$f'(x) = 3\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2\cdot\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2}{(x+1)^4}$.

$f(x) = (x\,e^x)^4$ (chaîne, puis produit)
$f'(x) = 4(xe^x)^3\cdot e^x(1+x) = 4x^3e^{4x}(1+x)$.

## 6. Dériver une fonction de la forme $f(x)^{g(x)}$

**Ni puissance, ni exponentielle**

Dans $f(x)^{g(x)}$, la variable est **à la fois dans la base et dans l'exposant** : aucune règle du tableau ne s'applique directement.

— $(x^x)' \neq x \cdot x^{x-1}$ (règle de la puissance : exposant supposé constant) ;

— $(x^x)' \neq x^x \ln x$ (règle de $a^u$ : base supposée constante).

**Formule** $(f(x) > 0)$

$$\left(f^{\,g}\right)' = f^{\,g}\left(g' \ln f + g\,\frac{f'}{f}\right)$$

**Attention**

La réécriture n'a de sens que si la base est **strictement positive** : préciser le domaine ($x > 0$, $\sin x > 0 \ldots$).

**Méthode – réécrire avec $e$ et ln**

Pour $f(x) > 0$, on utilise $A = e^{\ln A}$ : $f(x)^{g(x)} = e^{\,g(x)\ln f(x)}$.

(1) **Réécrire** sous cette forme.

(2) **Chaîne** sur $e^u$ avec $u = g(x)\ln f(x)$ : $(e^u)' = e^u\,u'$.

(3) **Produit** pour $u'$ : $u' = g'(x)\ln f(x) + g(x)\,\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

(4) **Remplacer** $e^u$ par $f(x)^{g(x)}$.

**Cas particuliers : on retrouve les règles connues**

$g = n$ constant $(g' = 0)$ : $(f^n)' = f^n \cdot n\dfrac{f'}{f} = n\,f^{\,n-1}f'$.

$f = a$ constant $(f' = 0)$ : $(a^g)' = a^g \ln a \cdot g'$.

Dans le cas général, la dérivée est la **somme** des deux réponses « fausses » :

$$(f^{\,g})' = \underbrace{g\,f^{\,g-1}f'}_{\text{comme } u^n} + \underbrace{f^{\,g}\ln f \cdot g'}_{\text{comme } a^u}.$$

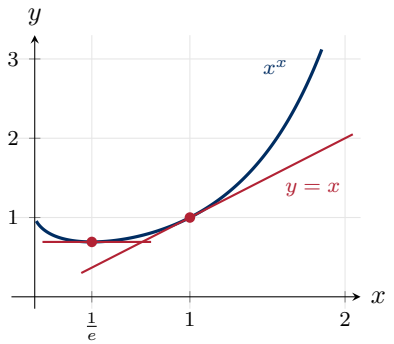
**Exemple 1 – $f(x) = x^x$, $x > 0$**

$f(x) = e^{x\ln x}$, avec $u = x\ln x$ et $u' = 1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

$$f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

**Tangente horizontale :** $x^x > 0$, donc $f'(x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \dfrac{1}{e}$.

**Tangente en $x = 1$ :** $f(1) = 1$, $f'(1) = 1(0+1) = 1$, donc $y = x$.




$f' < 0$ sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$, $f' > 0$ sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

**Autres exemples**

**2.** $f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x\,\ln x}$, $x > 0$ :

$$f'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x\,\ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

**3.** $f(x) = (\sin x)^x = e^{x\ln(\sin x)}$, $x \in\,]0, \pi[$ :

$$f'(x) = (\sin x)^x\left(\ln(\sin x) + \frac{x\cos x}{\sin x}\right).$$

**4.** $f(x) = (x^2+1)^{3x} = e^{3x\ln(x^2+1)}$ :

$$f'(x) = (x^2+1)^{3x}\left(3\ln(x^2+1) + \frac{6x^2}{x^2+1}\right).$$

**5.** $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, $x > 0$.

Avec $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x$ : $u' = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right)$, d'où

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right).$$