Révision – Chapitres 5, 6 et 7

La dérivée et la règle de l'Hôpital

Mohamed Nouidha

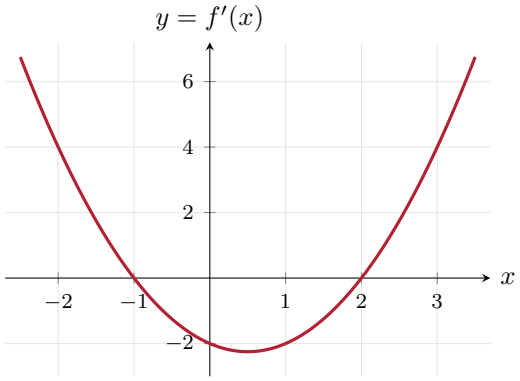
Automne 2026

Consignes

- **Justifier** chaque étape : une réponse sans démarche ne vaut rien à l'examen.
- Garder le symbole lim à chaque ligne tant que la limite n'est pas calculée ; écrire la forme ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, …) avant chaque application de la règle de l'Hôpital, indiquée par $\overset{\text{H}}{=}$.
- Simplifier avant de dériver, et simplifier le résultat (forme factorisée).
- Les exercices marqués $\star$ sont plus difficiles.

Partie A – La dérivée : définition, sens et règles

Exercice 1 (lecture graphique) Le graphe ci-dessous est celui de la **dérivée** f' (et non de f), sur l'intervalle $[-2{,}5\,;\,3{,}5]$.



a) Faire le tableau de signes de f' sur $[-2{,}5\,;\,3{,}5]$.

b) Sur quels intervalles f est-elle croissante ? décroissante ? Justifier à l'aide du signe de f'.

c) En quelles abscisses le graphe de f a-t-il une tangente horizontale ? Pour chacune, dire si le graphe de f y présente un sommet (maximum local) ou un creux (minimum local), et justifier.

d) Vrai ou faux : $f(3) > f(2)$. Justifier sans calculer f.

Exercice 2 (dérivabilité) Étudier la dérivabilité de f au point indiqué. Si f y est dérivable, donner $f'(a)$; sinon, décrire ce qui se passe sur le graphe.

a) $f(x) = x\,|x|$ en $a = 0$

b) $f(x) = |x^2 - 4|$ en $a = 2$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ en $a = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $a = 1$

Exercice 3 (paramètres) Déterminer les constantes a et b pour que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ bx - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

soit dérivable en $x = 1$.

Exercice 4 (réécrire avant de dériver) Simplifier, puis dériver. Préciser le domaine de f'.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4\sqrt{x} + 1}{x}$

c) $f(x) = \pi^2 x + \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{\pi}{x}$

Partie B – Fonctions élémentaires et règle de la chaîne

Exercice 5 (trigonométrie) Résoudre sur $[0, 2\pi]$.

a) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

b) $\sin(2x) = \cos x$. Expliquer pourquoi on ne doit pas diviser les deux membres par $\cos x$.

Exercice 6 (règles et valeurs numériques) On connaît les valeurs suivantes de deux fonctions dérivables f et g.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	3	-1	2	6
2	1	4	3	-2
3	2	5	1	7

Calculer, en écrivant la règle utilisée :

a) $(fg)'(2)$

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$

c) $(f \circ g)'(2)$

d) $(g \circ f)'(2)$

e) $h'(1)$ si $h(x) = f(x^2)$

f) $h'(3)$ si $h(x) = f(f(x))$

Exercice 7 (dériver) Dériver et simplifier. Certaines fonctions gagnent à être simplifiées **avant** de dériver.

a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

b) $f(x) = \ln\left(e^{x^2}\right)$

c) $f(x) = x^\pi + \pi^x + \pi^\pi$

d) $f(x) = \sin(x^\circ)$, x en degrés

e) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

f) $f(x) = \ln \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x - 1}}$, $x > 1$

g) $f(x) = \tan^3(2x^2)$

h) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

i) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^3}{(2x-1)^2}$

j) ⋆ $f(x) = x^x, \ x > 0$
(ni la règle de la puissance ni celle de a^x ne s'applique)

Exercice 8 (forme $f(x)^{g(x)}$) Réécrire chaque fonction sous la forme $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, puis dériver avec la règle de la chaîne.

a) $f(x) = (\sin x)^x, \ 0 < x < \pi$

b) $f(x) = x^{\ln x}, \ x > 0$

c) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x, \ x > 0$

d) $f(x) = (x^2+1)^{\cos x}$

e) Un étudiant écrit $\left(x^{\sin x}\right)' = \sin x \cdot x^{\sin x - 1}$. Expliquer son erreur en une phrase et donner la bonne dérivée.

f) ⋆ Trouver le point du graphe de $f(x) = x^{1/x}$ $(x > 0)$ où la tangente est horizontale.

Exercice 9 (analyser une solution) Refaire chaque calcul. Repérer l'erreur, l'expliquer en une phrase, puis donner la bonne réponse.

a) $\left(e^{2x}\right)' = 2x\, e^{2x-1}$

b) $\left(\ln(x^2+1)\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$

c) $\left(\sin^2(3x)\right)' = 2\sin(3x)\cos(3x)$

d) $\left(2^x\right)' = x\, 2^{x-1}$

Exercice 10 (applications)

a) Trouver le point du graphe de $f(x) = x^2 \ln x$ où la tangente est horizontale.

b) Sur $[0, 2\pi]$, trouver les abscisses où le graphe de $f(x) = x + 2\cos x$ a une tangente horizontale.

c) À l'aide d'une approximation linéaire bien choisie, estimer $\sqrt{4{,}1}$.

d) Une pierre tombe dans un étang. Le rayon de l'onde circulaire augmente de 2 cm/s. À quel rythme l'aire du disque augmente-t-elle quand le rayon vaut 10 cm ?

e) ⋆ On note f'' la dérivée de f'. Trouver toutes les valeurs de k pour lesquelles $f(x) = e^{kx}$ vérifie $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$ pour tout x.

Partie C – La règle de l'Hôpital

Exercice 11 (reconnaître la forme) Identifier la forme. Si elle n'est **pas** indéterminée, donner directement la limite ; sinon, calculer la limite.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - x^5\right)$

Exercice 12 (formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$) Calculer.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{1 - \cos x}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

f) $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

Exercice 13 (quand la règle ne conclut pas) ⋆

a) Montrer que la règle de l'Hôpital ne permet pas de calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x + \sin x}{x}$, puis calculer cette limite autrement. Qu'en conclure sur la règle ?

b) Montrer que la règle de l'Hôpital « tourne en rond » pour $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, puis calculer cette limite autrement.

Exercice 14 (formes $0\cdot\infty$ et $\infty - \infty$) Calculer en choisissant la méthode la plus efficace (la règle de l'Hôpital n'est pas toujours la meilleure).

a) $\lim_{x\to 0^+} \sin x \, \ln x$

b) $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right)$

c) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x}\right)$

Exercice 15 (formes 1^∞, 0^0, ∞^0) Identifier la forme, puis calculer par la méthode du logarithme.

a) $\lim_{x\to 0} (1 + 2x)^{3/x}$

b) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

d) ⋆ $\lim_{x\to+\infty} (e^x + x)^{1/x}$

Exercice 16 (paramètre) ⋆ Déterminer la valeur de a pour laquelle $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - 1 - 2x}{x^2}$ existe et est un nombre réel, puis calculer cette limite. Justifier pourquoi aucune autre valeur de a ne convient.

Partie D – Problèmes de synthèse

Exercice 17 Soit $f(x) = x^2 e^{-x}$.

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calculer $f'(x)$ sous forme factorisée, puis trouver les points du graphe où la tangente est horizontale.

Exercice 18 ⋆ Soit $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de g en 0. Si g y est dérivable, calculer $g'(0)$.