Révision – Chapitres 5, 6 et 7 – Solutionnaire

La dérivée et la règle de l'Hôpital

Mohamed Nouidha

Automne 2026

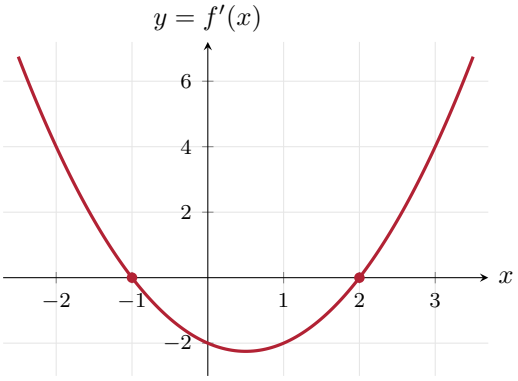
Comment utiliser ce solutionnaire

Faire d'abord chaque exercice **sans regarder**, puis comparer la **démarche** et pas seulement la réponse. À l'examen, une réponse juste sans justification ne donne pas les points : la rédaction ci-dessous montre ce qui est attendu.

Partie A – La dérivée : définition, sens et règles

Exercice 1 (lecture graphique)

Le graphe donné est celui de f' sur $[-2{,}5\,;\,3{,}5]$. Signe de f', croissance et décroissance de f, points à tangente horizontale.



Points rouges : $f'(x) = 0$

À retenir

La **hauteur** du graphe de f' en x est la **pente** de la tangente au graphe de f en x.

- $f' > 0$ sur un intervalle $\Rightarrow$ f croissante sur cet intervalle ;
- $f' < 0$ sur un intervalle $\Rightarrow$ f décroissante sur cet intervalle ;
- $f'(a) = 0 \iff$ tangente horizontale au point d'abscisse a.

a) Le graphe de f' coupe l'axe des x en $x = -1$ et $x = 2$; il est au-dessus de l'axe à gauche de -1 et à droite de 2, au-dessous entre les deux.

x	$-2{,}5$		-1		2		$3{,}5$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

b) f est **croissante** sur $[-2{,}5\,;\,-1]$ et sur $[2\,;\,3{,}5]$, car $f'(x) > 0$ pour $-2{,}5 \leq x < -1$ et pour $2 < x \leq 3{,}5$ (f' ne s'annule qu'en -1 et en 2). f est **décroissante** sur $[-1\,;\,2]$, car $f' < 0$ pour $-1 < x < 2$.

c) Tangente horizontale $\iff f'(x) = 0$: en $x = -1$ et en $x = 2$.

- En $x = -1$: f' passe de $+$ à $-$; f croît puis décroît : le graphe de f présente un **sommet** (maximum local).
- En $x = 2$: f' passe de $-$ à $+$; f décroît puis croît : le graphe de f présente un **creux** (minimum local).

d) **Vrai.** Sur $[2\,;\,3]$, $f'(x) \geq 0$ (et $f' > 0$ pour $x > 2$), donc f est croissante sur cet intervalle : $f(3) > f(2)$.

Attention

On lit le **signe** de f' (au-dessus ou au-dessous de l'axe), pas sa croissance. Erreur fréquente : dire que f est croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,2\right]$ parce que le graphe de f' y monte. Sur cet intervalle, f' croît mais reste **négative** : f y est décroissante.

Exercice 2 (dérivabilité)

Étudier la dérivabilité au point indiqué : a) $x|x|$ en 0 ; b) $|x^2 - 4|$ en 2 ; c) $\sqrt[3]{x-1}$ en 1 ; d) fonction par morceaux en 1.

Dans chaque cas, on étudie la limite du taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand $h \to 0$.

a) $f(0) = 0$ et, pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h\,|h|}{h} = |h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. La limite existe : f est **dérivable** en 0 et $f'(0) = 0$ (tangente horizontale).

Attention

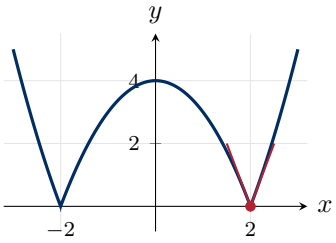
On ne peut pas utiliser la règle du produit, car $|x|$ n'est pas dérivable en 0. Il faut revenir à la définition. Un produit peut être dérivable même si un des facteurs ne l'est pas.

b) $f(2) = 0$ et $(2+h)^2 - 4 = 4h + h^2 = h(4+h)$. Pour h proche de 0, $4 + h > 0$, donc

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{|h|\,(4+h)}{h} = \begin{cases} 4+h & \text{si } h > 0 \\ -(4+h) & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

Ce taux tend vers 4 si $h \to 0^+$ et vers -4 si $h \to 0^-$.

Les deux limites diffèrent : le taux n'a pas de limite, f **n'est pas dérivable** en 2. Le graphe forme un **coin** au point $(2, 0)$, avec des demi-tangentes de pentes -4 et 4.



c) $f(1) = 0$ et, pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{h^{1/3}}{h} = \dfrac{1}{h^{2/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \xrightarrow[h\to 0]{} +\infty$ (car $h^2 > 0$ des deux côtés). f **n'est pas dérivable** en 1 : la tangente au point $(1, 0)$ est **verticale** (droite $x = 1$), elle n'a pas de pente.

d) $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$, mais $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \neq 2$. f n'est pas continue en 1 ; or dérivable $\Rightarrow$ continue, donc f **n'est pas dérivable** en 1.

Vérification : pour $h < 0$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2-2}{h} = \dfrac{h^2+2h-1}{h}$; le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers 0^- : le taux tend vers $+\infty$.

Piège

Les deux morceaux ont la même dérivée en 1 : $(x^2)' = 2x$ vaut 2 en 1, et $(2x)' = 2$. Cela ne suffit pas : il faut d'abord la **continuité**.

Exercice 3 (paramètres)

Déterminer a et b pour que $f(x) = ax^2 + 1$ $(x < 1)$, $f(x) = bx - 2$ $(x \geq 1)$ soit dérivable en 1.

Condition 1 – continuité (nécessaire, car dérivable $\Rightarrow$ continue). On a $f(1) = b-2$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = a+1$, d'où

$$a + 1 = b - 2. \tag{1}$$

Condition 2 – même limite du taux des deux côtés.

— Pour $h > 0$: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{b(1+h)-2-(b-2)}{h} = \dfrac{bh}{h} = b \to b$.

— Pour $h < 0$: en utilisant (1), $f(1) = a+1$, donc $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{a(1+h)^2+1-(a+1)}{h} = \dfrac{a(2h+h^2)}{h} = a(2+h) \to 2a$.

Il faut donc

$$2a = b. \tag{2}$$

En remplaçant (2) dans (1) : $a + 1 = 2a - 2$, d'où $\boxed{a = 3}$ et $\boxed{b = 6}$.

Vérification : $f(x) = 3x^2 + 1$ $(x < 1)$ et $6x - 2$ $(x \geq 1)$: les deux morceaux valent 4 en 1, et les deux pentes valent 6.

Remarque

Sans la condition (1), le taux de variation à gauche aurait un numérateur qui ne tend pas vers 0 : il tendrait vers $\pm\infty$. C'est pour cela que la continuité vient en premier.

Exercice 4 (réécrire avant de dériver)

Simplifier, puis dériver et préciser le domaine de f'.

a) f est définie pour $x \neq 1$. Pour $x \neq 1$: $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, donc $f'(x) = 1$, **pour** $x \neq 1$.

Le graphe est la droite $y = x + 1$ privée du point $(1, 2)$: f n'est pas définie en 1, donc ni continue ni dérivable en 1.

b) Domaine : $x > 0$. On divise terme à terme par le monôme x, avec $\sqrt{x} = x^{1/2}$:

$$f(x) = 2x^2 - 4x^{1/2-1} + x^{-1} = 2x^2 - 4x^{-1/2} + x^{-1},$$

$$f'(x) = 4x + 2x^{-3/2} - x^{-2} = 4x + \frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

c) π^2 et $\frac{1}{\pi}$ sont des **constantes** : $f(x) = \left(\pi^2 + \frac{1}{\pi}\right) x + \pi\, x^{-1}$, donc

$$f'(x) = \pi^2 + \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{x^2}, \qquad x \neq 0.$$

Attention

π n'est pas une variable. Erreur fréquente : écrire $(\pi^2 x)' = 2\pi x$.

Partie B – Fonctions élémentaires et règle de la chaîne

Exercice 5 (trigonométrie)

a) On pose $u = \cos x$: $2u^2 - u - 1 = 0 \iff (2u+1)(u-1) = 0 \iff u = 1$ ou $u = -\frac{1}{2}$.

- $\cos x = 1$ sur $[0, 2\pi]$: $x = 0$ ou $x = 2\pi$.
- $\cos x = -\frac{1}{2}$: angle de référence $\frac{\pi}{3}$, cosinus négatif dans les quadrants II et III : $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

$S = \left\{0,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ 2\pi\right\}$.

b) Avec $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$:

$$2\sin x\cos x - \cos x = 0 \iff \cos x\,(2\sin x - 1) = 0 \iff \cos x = 0 \ \text{ ou } \ \sin x = \tfrac{1}{2}.$$

$\cos x = 0$: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. $S = \left\{\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Attention

Diviser par $\cos x$ suppose $\cos x \neq 0$: on perdrait $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Règle : ne jamais diviser par une expression qui peut s'annuler ; **factoriser** à la place.

Exercice 6 (règles et valeurs numériques)

a) Produit : $(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 10$.

b) Quotient : $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{g(2)^2} = \frac{4 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)}{3^2} = \frac{14}{9}$.

c) Chaîne : $(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(3) \cdot (-2) = 5 \cdot (-2) = -10$.

d) Chaîne : $(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(1) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$.

e) $h(x) = f(x^2)$: $h'(x) = f'(x^2) \cdot 2x$, donc $h'(1) = f'(1) \cdot 2 = (-1) \cdot 2 = -2$.

f) $h(x) = f(f(x))$: $h'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$, donc $h'(3) = f'(f(3)) \cdot f'(3) = f'(2) \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$.

Attention

Dans $f'(g(2))$, on évalue f' **en** $g(2) = 3$, et non en 2. Erreur fréquente pour c) : $f'(2)\,g'(2) = -8$.

Exercice 7 (dériver)

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pour tout x, donc $f'(x) = 0$. (Par la chaîne : $2\sin x \cos x + 2\cos x(-\sin x) = 0$ ✓)

b) ln et l'exponentielle sont réciproques : $f(x) = x^2$, donc $f'(x) = 2x$.

c) Trois natures différentes : x^π (base variable, exposant constant) : règle de la puissance ; π^x (base constante, exposant variable) : $(a^x)' = a^x \ln a$; π^π : constante.

$$f'(x) = \pi x^{\pi-1} + \pi^x \ln \pi.$$

d) La formule $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ exige un angle en **radians**. On convertit : $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ rad, donc

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right).$$

C'est pour éviter ce facteur $\frac{\pi}{180}$ qu'on travaille toujours en radians.

e) Pour $x > 0$, $u = x + \sqrt{x}$, $u' = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$:

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

f) Pour $x > 1$, on simplifie d'abord avec les propriétés du logarithme ($x^2+1 > 0$ et $x - 1 > 0$) :

$$f(x) = \ln(x^2+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2(x-1)}.$$

g) Trois couches : cube → tangente → $2x^2$. Une couche = un facteur :

$$f'(x) = 3\tan^2(2x^2)\cdot \sec^2(2x^2)\cdot 4x = 12x\tan^2(2x^2)\sec^2(2x^2).$$

h) Produit avec $u = x$ et $v = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, où $v' = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$:

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \neq 0.$$

i) Quotient, avec la chaîne pour u et v : $u = (x^2+1)^3$, $u' = 6x(x^2+1)^2$; $v = (2x-1)^2$, $v' = 4(2x-1)$.

$$f'(x) = \frac{6x(x^2+1)^2(2x-1)^2 - (x^2+1)^3\cdot 4(2x-1)}{(2x-1)^4}.$$

On met en évidence $2(x^2+1)^2(2x-1)$ au numérateur :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)^2(2x-1)\left[3x(2x-1) - 2(x^2+1)\right]}{(2x-1)^4} = \frac{2(x^2+1)^2(4x^2-3x-2)}{(2x-1)^3}, \qquad x \neq \tfrac{1}{2}.$$

j) La base **et** l'exposant varient. On réécrit $x^x = e^{x\ln x}$ ($x > 0$) :

$$f'(x) = e^{x\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Attention

Deux réponses fausses fréquentes : $x \cdot x^{x-1}$ (règle de la puissance, exposant supposé constant) et $x^x \ln x$ (règle de a^x, base supposée constante).

Exercice 8 (forme $f(x)^{g(x)}$)

Méthode

Pour $f(x) > 0$: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, donc $\Big(f(x)^{g(x)}\Big)' = f(x)^{g(x)} \cdot \Big(g(x)\ln f(x)\Big)'$. On dérive l'exposant $g\ln f$ avec la règle du produit.

a) Sur $]0,\pi[$, $\sin x > 0$: $(\sin x)^x = e^{x\ln(\sin x)}$ et $\big(x\ln(\sin x)\big)' = \ln(\sin x) + x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}$. Donc

$$f'(x) = (\sin x)^x\big(\ln(\sin x) + x\cot x\big).$$

b) $x^{\ln x} = e^{\ln x\cdot\ln x} = e^{(\ln x)^2}$ et $\big((\ln x)^2\big)' = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$. Donc

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}\,x^{\ln x}.$$

c) Pour $x>0$, $1+\frac{1}{x} > 0$: $f(x) = e^{x\ln(1+1/x)}$. Avec $\big(\ln(1+\frac{1}{x})\big)' = \dfrac{-1/x^2}{1+1/x} = -\dfrac{1}{x(x+1)}$:

$$\Big(x\ln\Big(1+\tfrac{1}{x}\Big)\Big)' = \ln\Big(1+\tfrac{1}{x}\Big) - \frac{x}{x(x+1)} = \ln\Big(1+\tfrac{1}{x}\Big) - \frac{1}{x+1},$$

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right].$$

d) $x^2+1 > 0$: $f(x) = e^{\cos x\,\ln(x^2+1)}$. Donc

$$f'(x) = (x^2+1)^{\cos x}\left[-\sin x\,\ln(x^2+1) + \frac{2x\cos x}{x^2+1}\right].$$

e) L'étudiant applique la règle de la puissance, qui exige un exposant **constant** ; ici l'exposant $\sin x$ varie. Correctement, avec $x^{\sin x} = e^{\sin x\ln x}$ $(x>0)$:

$$(x^{\sin x})' = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

f) $f(x) = e^{(\ln x)/x}$ et $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, donc

$$f'(x) = x^{1/x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Comme $x^{1/x} > 0$ et $x^2 > 0$: $f'(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$. Le point est $(e,\ e^{1/e}) \approx (2{,}718\,;\,1{,}445)$.

Exercice 9 (analyser une solution)

a) **Erreur :** la règle de la puissance est appliquée alors que la variable est dans l'**exposant**. Correct : $u = 2x$, $\left(e^u\right)' = e^u u'$, donc $\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$.

b) **Erreur :** le facteur u' de la règle de la chaîne est oublié. Correct : $\left(\ln(x^2+1)\right)' = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

c) **Erreur :** il y a trois couches (carré $\to$ sinus $\to 3x$) et la dérivée de la couche intérieure $3x$ est oubliée. Correct : $2\sin(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3 = 6\sin(3x)\cos(3x) = 3\sin(6x)$.

d) **Erreur :** 2^x est une exponentielle (base constante), pas une puissance. Correct : $\left(2^x\right)' = 2^x \ln 2$.

Exercice 10 (applications)

a) Domaine $x > 0$. $f'(x) = 2x\ln x + x^2\cdot\dfrac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$. Comme $x > 0$: $f'(x) = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. $f\left(e^{-1/2}\right) = e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2e}$. Point : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},\ -\dfrac{1}{2e}\right)$. ($x = 0$ annule le facteur x mais n'est pas dans le domaine.)

b) $f'(x) = 1 - 2\sin x = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$ sur $[0, 2\pi]$.

c) On choisit $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$ (proche de 4,1, et $\sqrt{4}$ est connu). $f(4) = 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \dfrac{1}{4}$. Approximation linéaire : $\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x-4)$, donc

$$\sqrt{4{,}1} \approx 2 + \tfrac{1}{4}(0{,}1) = 2{,}025 \qquad \text{(calculatrice : } 2{,}02485\ldots\text{)}$$

d) $A = \pi r^2$ et r dépend du temps. Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\pi r\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\pi(10)(2) = 40\pi \approx 125{,}7 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

e) $f'(x) = ke^{kx}$ et $f''(x) = k^2e^{kx}$, donc

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^{kx}(k^2 - 3k + 2).$$

Comme $e^{kx} > 0$ pour tout x, l'égalité à 0 pour tout x équivaut à $k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2) = 0$: $k = 1$ ou $k = 2$.

Partie C – La règle de l'Hôpital

Exercice 11 (reconnaître la forme)

a) Numérateur $\to 0$, dénominateur $\to 1$: forme $\frac{0}{1}$, **non indéterminée**. Limite : 0.

Attention

Appliquer l'Hôpital ici donnerait $\frac{\cos 0}{1} = 1$: **faux**. On vérifie toujours la forme avant d'appliquer la règle.

b) $\ln x \to -\infty$ et $x \to 0^+$: forme $\frac{-\infty}{0^+}$, **non indéterminée**. Limite : $-\infty$. (L'Hôpital, mal utilisé, donnerait $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{1} = +\infty$: même le signe est faux.)

c) Forme 1^∞, indéterminée. Posons $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1/x} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2/x^3}{1+1/x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2/x}{1+1/x^2} = 0.$$

Donc la limite vaut $e^0 = 1$.

Attention

Une forme 1^∞ ne vaut pas toujours e (ni 1) : elle peut valoir n'importe quoi, d'où le calcul.

d) Base $\frac{1}{x} \to +\infty$, exposant $\ln x \to -\infty$: forme $(+\infty)^{-\infty}$, **non indéterminée**. Limite : 0. Justification : $\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln(1/x)} = e^{-(\ln x)^2} \to e^{-\infty} = 0$.

e) Forme $\infty - \infty$, indéterminée. On met e^x en évidence : $e^x - x^5 = e^x\left(1 - \dfrac{x^5}{e^x}\right)$. En appliquant l'Hôpital cinq fois (forme $\frac{\infty}{\infty}$ à chaque étape) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{120}{e^x} = 0$. Donc la limite vaut $(+\infty)\cdot 1 = +\infty$.

Exercice 12 (formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$)

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{2x} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{6x} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}$.

c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{5x^4}{3x^2} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{5x^2}{3} = \dfrac{5}{3}$. (On peut aussi factoriser $x - 1$ au numérateur et au dénominateur.)

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x^2)}{1 - \cos x} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x\cos(x^2)}{\sin x}$, encore $\frac{0}{0}$. Plutôt que d'appliquer la règle une deuxième fois, on regroupe :

$$\lim_{x\to0} 2\cos(x^2) \cdot \frac{x}{\sin x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \qquad \text{car } \lim_{x\to0} \frac{x}{\sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

e) Forme $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\ln x}{\sqrt{x}} \left(\tfrac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0.$$

Simplifier **après chaque application** : c'est ce qui évite de tourner en rond.

f) Forme $\frac{0}{0}$ en $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\cos x}{2\cos x\,(-\sin x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{2\sin x} = \frac{1}{2}$$

(on simplifie par $\cos x \neq 0$ pour $x \neq \frac{\pi}{2}$). Sans l'Hôpital : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$, donc le quotient vaut $\frac{1}{1+\sin x} \to \frac{1}{2}$.

Exercice 13 (quand la règle ne conclut pas)

a) Forme $\frac{\infty}{\infty}$. La règle donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\cos x}{1}$, qui **n'existe pas** : $1+\cos x$ oscille entre 0 et 2. La règle dit : *si* $\lim \frac{f'}{g'}$ existe, alors $\lim \frac{f}{g}$ est la même. Si $\lim \frac{f'}{g'}$ n'existe pas, elle ne permet **rien** de conclure.

Autrement : $\dfrac{x+\sin x}{x} = 1 + \dfrac{\sin x}{x}$, et $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \le \dfrac{1}{x} \to 0$ (théorème du sandwich). La limite vaut 1.

Conclusion : la règle de l'Hôpital est une condition **suffisante**, pas nécessaire.

b) Forme $\frac{\infty}{\infty}$ ($e^{-x} \to 0$). Une application donne $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (l'inverse du quotient de départ), et une deuxième ramène au quotient de départ : la règle « tourne en rond ». On divise plutôt numérateur et dénominateur par e^x :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Exercice 14 (formes $0\cdot\infty$ et $\infty - \infty$)

a) Forme $0\cdot(-\infty)$. On écrit $\sin x \ln x = \dfrac{\sin x}{x} \cdot x \ln x$, avec $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ et

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x} \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+} (-x) = 0.$$

La limite vaut $1\cdot 0 = 0$.

b) Forme $\infty\cdot 0$. On écrit le produit comme un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1.$$

(Ou : poser $t = \frac{1}{x} \to 0^+$, on obtient $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$.)

c) Forme $\infty - \infty$. Même dénominateur :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x-1)} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

d) Forme $\infty - \infty$. Ici, le **conjugué** est la méthode efficace :

$$x - \sqrt{x^2-3x} = \frac{x^2 - (x^2-3x)}{x + \sqrt{x^2-3x}} = \frac{3x}{x+\sqrt{x^2-3x}}.$$

Pour $x > 3$, $\sqrt{x^2-3x} = x\sqrt{1-\frac{3}{x}}$, donc $\dfrac{3x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} = \dfrac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{3}{2}$.

Exercice 15 (formes 1^∞, 0^0, ∞^0)

Méthode

Poser $h(x) = f(x)^{g(x)}$, calculer $L = \lim \ln h(x) = \lim g(x) \ln f(x)$, puis conclure : $\lim h(x) = e^L$.

a) Forme 1^∞. $\ln h(x) = \dfrac{3\ln(1+2x)}{x}$:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+2x)}{x} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot \frac{2}{1+2x}}{1} = 6 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}(1+2x)^{3/x} = e^6.$$

b) Forme 1^∞ ($\cos x > 0$ près de 0). $\ln h(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x/\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{2x} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

La limite vaut donc $e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

c) Forme 1^∞ (base $\frac{x}{x+1} \to 1$). $\ln h(x) = x \ln \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\ln x - \ln(x+1)}{1/x}$, forme $\frac{0}{0}$:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - \ln(x+1)}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1.$$

La limite vaut donc $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

d) Forme ∞^0. $\ln h(x) = \dfrac{\ln(e^x + x)}{x}$, forme $\frac{\infty}{\infty}$:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-x}}{1+\frac{x}{e^x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{limite } = e.$$

On a divisé par e^x et utilisé $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Exercice 16 (paramètre)

Déterminer a pour que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - 1 - 2x}{x^2}$ soit un nombre réel, puis la calculer.

Pour **tout** a, le numérateur vaut $e^0 - 1 - 0 = 0$ en 0 : forme $\frac{0}{0}$. Une application donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\,e^{ax} - 2}{2x}, \qquad \text{dont le numérateur tend vers } a - 2.$$

— **Si $a \neq 2$:** forme $\frac{a-2}{0}$, non indéterminée : ce quotient tend vers $+\infty$ d'un côté de 0 et vers $-\infty$ de l'autre. Pour conclure directement sur la limite de départ, on l'écrit

$$\frac{e^{ax} - 1 - 2x}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{ax} - 1 - 2x}{x}, \qquad \text{où} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1 - 2x}{x} \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} (a\,e^{ax} - 2) = a - 2 \neq 0.$$

Le produit d'un facteur qui tend vers $a - 2 \neq 0$ par $\frac{1}{x}$ tend vers $\pm\infty$ (signe différent de chaque côté de 0) : la limite n'est pas un nombre réel.

— **Si $a = 2$:** $\lim_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x}-2}{2x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{4e^{2x}}{2} = 2.$

Seule la valeur $\boxed{a = 2}$ convient, et la limite vaut $\boxed{2}$.

Partie D – Problèmes de synthèse

Exercice 17 ($f(x) = x^2 e^{-x}$)

a) En $+\infty$: $x^2 e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$, forme $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0.$

En $-\infty$: $x^2 \to +\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$: forme $(+\infty)\cdot(+\infty)$, **non indéterminée**. Limite : $+\infty$.

b) Produit et chaîne : $f'(x) = 2x\,e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) = x\,e^{-x}(2-x)$. Comme $e^{-x} > 0$: $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$. Points : $(0,0)$ et $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right) \approx (2\,;\,0{,}541)$.

Exercice 18 (dérivabilité et règle de l'Hôpital)

$g(x) = \frac{e^x-1}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = 1$. Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

a) $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1 = g(0)$: g est **continue** en 0.

b) On revient à la définition (la formule $g(x) = \frac{e^x-1}{x}$ n'est pas valable en 0, donc on ne peut pas dériver cette formule puis remplacer x par 0) :

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^h-1}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{2h} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2}.$$

La limite existe : g est **dérivable** en 0 et $g'(0) = \dfrac{1}{2}$.

À retenir

Cet exercice combine les trois chapitres : la définition de la dérivée (ch. 5), la dérivée de e^x (ch. 6) et la règle de l'Hôpital (ch. 7).