Résumé du chapitre 7

La règle de l'Hôpital : calcul de limites et formes indéterminées

Mohamed Nouidha

Automne 2026

1 Formes indéterminées

Une limite est **indéterminée** lorsque la substitution directe donne une expression dont la valeur n'est pas fixée d'avance. Le résultat dépend de la **vitesse** à laquelle chaque partie tend vers 0 ou vers ∞, et c'est précisément ce que mesure la dérivée.

Formes indéterminées	$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0
Formes non indéterminées	$\infty+\infty=\infty$, $\infty\cdot\infty=\infty$, $\dfrac{c}{0^\pm}=\pm\infty$ $(c\neq 0)$, $0^{+\infty}=0$

1^∞ n'est pas égal à 1

La base tend vers 1 mais l'exposant grandit : il y a compétition. Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

2 La règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de la forme $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, alors

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pourvu que la limite de droite existe (ou soit $\pm\infty$). La règle reste valable pour $x\to a^\pm$ et pour $x\to\pm\infty$.

Idée. Si $f(a)=g(a)=0$, près de a chaque fonction se confond avec sa tangente : $\dfrac{f(x)}{g(x)}\approx\dfrac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Méthode en 4 étapes

1. **Substituer** pour identifier la forme. Si ce n'est pas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on **n'applique pas** la règle.
2. **Dériver** le numérateur et le dénominateur **séparément**.
3. **Simplifier** l'expression obtenue (fractions de fractions, facteurs communs).
4. **Substituer à nouveau.** Si la forme est encore $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, retour à l'étape 2.

Notation : on écrit $\overset{\text{H}}{=}$ à chaque application et on indique la forme entre parenthèses.

Forme $\frac{0}{0}$, deux applications

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

Forme $\frac{\infty}{\infty}$, simplifier

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Croissances comparées

Pour tout $p>0$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x}=0$

À l'infini : $\ln x \ll x^p \ll e^x$

3 Les autres formes : se ramener à un quotient

Forme	Transformation	Exemple type
$0\cdot\infty$	$f(x)\,g(x)=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ ou $\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$	$\displaystyle\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}=0$
$\infty-\infty$	même dénominateur (ou conjugué)	$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=0$
$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$	$\ln\big(f(x)^{g(x)}\big)=g(x)\ln f(x)$	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Forme $0\cdot\infty$: lequel envoyer au dénominateur ?

On garde $\ln x$ au **numérateur** (sa dérivée $\frac{1}{x}$ est simple) et on envoie les puissances x^p et les exponentielles au **dénominateur**. Un mauvais choix redonne une forme indéterminée plus compliquée qu'au départ.

Méthode du logarithme — formes 0^0, 1^∞, ∞^0

Pour calculer $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}$:

1. poser $h(x)=f(x)^{g(x)}$, de sorte que $\ln h(x)=g(x)\ln f(x)$;
2. calculer $L=\displaystyle\lim_{x\to a}\ln h(x)$ (forme $0\cdot\infty$, ramenée à un quotient) ;
3. conclure : $\displaystyle\lim_{x\to a}h(x)=e^L$.

Forme ∞^0

$h(x)=x^{1/x}$, donc $\ln h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ (forme $\frac{\infty}{\infty}$).

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0,\qquad\text{donc}\qquad\lim_{x\to+\infty}x^{1/x}=e^0=1.$$

4 Erreurs fréquentes

À éviter

- **Appliquer la règle sans forme indéterminée.** $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{0}{2} = 0$ par substitution directe ; appliquer la règle donnerait un résultat faux.
- **Dériver le quotient.** On calcule $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, et non $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)$.
- **Oublier la règle de la chaîne.** $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$.
- **Ne pas revérifier la forme** avant chaque nouvelle application.
- **S'arrêter à** L pour les formes puissances : la réponse est e^L, pas L.

En résumé

- La règle de l'Hôpital ne s'applique qu'aux formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$; toutes les autres formes indéterminées doivent d'abord être transformées en quotient.
- Après chaque dérivation, on simplifie : parfois, l'algèbre suffit à conclure sans réappliquer la règle.
- La règle de l'Hôpital est un outil parmi d'autres (factorisation, conjugué, simplification).