

Chapitre 0 - Rappels de calcul algébrique

Ensembles, intervalles, fonctions linéaires et quadratiques, puissances,
factorisation

Notes de cours – Calcul différentiel

Mohamed Nouidha

Collège Sainte-Anne

Session Automne 2026

Plan du cours

- 1 Ensembles de nombres et intervalles
- 2 Fonctions linéaires et quadratiques
- 3 Propriétés des puissances
- 4 Factorisation et fonctions rationnelles

§0

Ensembles de nombres et intervalles de $\mathbb{R}$

Définition : Hiérarchie des ensembles

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: entiers **naturels**
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: entiers **relatifs**
- $\mathbb{Q}$: nombres **rationnels** (quotients $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$)
- $\mathbb{R}$: nombres **réels** (tous les points de la droite numérique)

Nombres irrationnels

Les réels **irrationnels** ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) ne sont pas des quotients d'entiers : $\sqrt{2}$, π , e , $\sqrt{3}$, ... En calcul différentiel on travaille toujours dans $\mathbb{R}$.

Intervalles de $\mathbb{R}$: notation

Définition : Types d'intervalles ($a < b$)

Notation	Définition	Type
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	fermé
$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	ouvert
$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	semi-ouvert
$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	semi-ouvert
$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	infini
$] - \infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	infini
$] - \infty, +\infty[$	$\mathbb{R}$ tout entier	

Crochet fermé $[$ ou crochet ouvert $]$ $[$?

La règle

- **Crochet fermé $[$:** la borne est **incluse** ($\leq$ ou $\geq$).
- **Crochet ouvert $] [$:** la borne est **exclue** ($<$ ou $>$).
- $+\infty$ et $-\infty$ **prennent toujours un crochet ouvert** (l'infini n'est pas un nombre réel).

Exemple : Traduction inégalité $\leftrightarrow$ intervalle

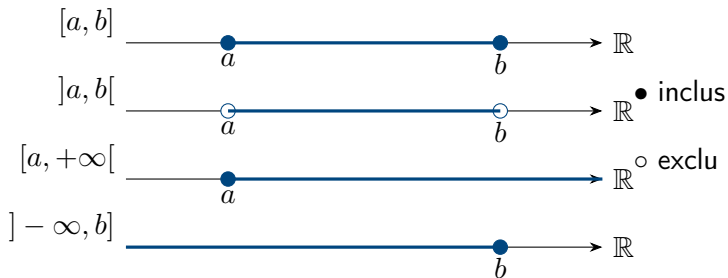
$$-3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-3, 5]$$

$$x \leq -1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1]$$

$$x > 2 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[$$

$$-1 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in]-1, 4]$$

Représentation sur la droite réelle



Opérations sur les intervalles

Définition : Union et intersection

- L'**union** $A \cup B$ contient les éléments de A **ou** de B .
- L'**intersection** $A \cap B$ contient les éléments de A **et** de B .

Exemple : Exemples

$$[-1, 3] \cup [2, 7] = [-1, 7]$$

$$[-1, 3] \cap [2, 7] = [2, 3]$$

$$]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[=]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[\quad (\text{non connexe})$$

$$]-\infty, 2[\cap]5, +\infty[= \emptyset$$

Exercice : Traduisez en notation d'intervalle

- ❶ $-5 < x \leq 2$
- ❷ $x > 7$
- ❸ $x \leq -3$
- ❹ $1 \leq x < 6$
- ❺ $x \leq -1$ et $x > -5$
- ❻ $3 < x$ ou $x \leq 1$
- ❼ $x > 12$ et $x \leq \frac{2}{3}$
- ❽ $x \in \mathbb{R}$ (tous les réels)

Méthode : Solutions

- ① $] - 5, 2]$
- ② $]7, +\infty[$
- ③ $] - \infty, -3]$
- ④ $[1, 6[$
- ⑤ $] - 5, -1]$
- ⑥ $] - \infty, 1] \cup]3, \infty[$
- ⑦ $\emptyset$
- ⑧ $] - \infty, +\infty[$

Exercice : Traduisez en inégalité(s)

- ① $x \in [-4, 1[$
- ② $x \in]2, +\infty[$
- ③ $x \in]-\infty, 5]$
- ④ $x \in]-3, 0[\cup]2, 7]$

Solutions : intervalles en inégalités

Méthode : Solutions

① $-4 \leq x < 1$

② $x > 2$

③ $x \leq 5$

④ $-3 < x < 0 \quad \text{ou} \quad 2 < x \leq 7$

Exercices : union et intersection

Exercice : Calculez $A \cap B$ et $A \cup B$

- ① $A = [-2, 4], \quad B =]1, 6]$
- ② $A =]-\infty, 3[, \quad B = [-1, +\infty[$
- ③ $A = [0, 5[, \quad B =]5, 10]$
- ④ $A =]-\infty, 2[, \quad B =]2, +\infty[$

Méthode : Solutions

- ① $A \cap B =]1, 4]$ $A \cup B = [-2, 6]$
- ② $A \cap B = [-1, 3[$ $A \cup B =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
- ③ $A \cap B = \emptyset$ $A \cup B = [0, 5[\cup]5, 10]$
- ④ $A \cap B = \emptyset$ $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

§1

Fonctions linéaires et quadratiques

et leurs graphes

La fonction linéaire (ou affine)

Définition : Fonction linéaire

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **linéaire** (on dit aussi *affine*) si elle s'écrit sous la forme

$$f(x) = mx + b$$

où $m, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

- m est la **pente** (taux de variation constant) ;
 - b est l'**ordonnée à l'origine**, c.-à-d. $f(0) = b$.
-
- Le graphe de f est une **droite**.
 - Si $m > 0$: f est croissante. Si $m < 0$: f est décroissante. Si $m = 0$: f est constante.

Calculer la pente à partir de deux points

Définition : Pente entre deux points

Si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points distincts du graphe de f , alors

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Exemple : Pente et équation d'une droite

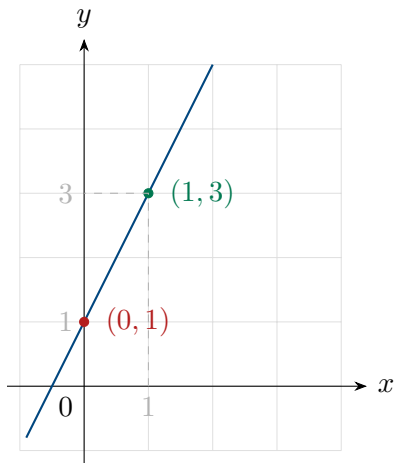
Soit les points $A(1, 3)$ et $B(4, 9)$, alors $m = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$.

On utilise ensuite $y - y_1 = m(x - x_1)$ avec $A(1, 3)$:

$$y - 3 = 2(x - 1) \implies y = 2x - 2 + 3 = 2x + 1$$

Donc $f(x) = 2x + 1$.

Graphes d'une fonction linéaire



Repères clés pour $f(x) = 2x + 1$:

- L'ordonnée à l'origine est $b = 1$: le graphe coupe l'axe des y en $(0, 1)$.
- La pente $m = 2$: on **monte de 2** chaque fois qu'on **avance de 1** en x .
- Le zéro s'obtient en posant $f(x) = 0$:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Exercice rapide

Exercice : Application

- 1 Trouvez l'équation de la droite passant par $(-2, 5)$ et $(3, -5)$.
- 2 Soit $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$. Calculez $g(-2)$, et trouvez le zéro de g .

Exercice : Application

- 1 Trouvez l'équation de la droite passant par $(-2, 5)$ et $(3, -5)$.
- 2 Soit $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$. Calculez $g(-2)$, et trouvez le zéro de g .

Méthode : Solutions

- 1 $m = \frac{-5 - 5}{3 - (-2)} = \frac{-10}{5} = -2$. Avec $(3, -5)$:
 $y + 5 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 1$.
- 2 $g(-2) = -\frac{1}{2}(-2) + 4 = 1 + 4 = 5$. Zéro : $-\frac{1}{2}x + 4 = 0 \Rightarrow x = 8$.

La fonction quadratique

Définition : Fonction quadratique

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **quadratique** si elle s'écrit sous la **forme générale**

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

- Le graphe de f est une **parabole**.
- Si $a > 0$: la parabole ouvre **vers le haut** (la fonction admet un **minimum**).
- Si $a < 0$: la parabole ouvre **vers le bas** (la fonction admet un **maximum**).
- $|a|$ contrôle l'**ouverture** : plus $|a|$ est grand, plus la parabole est étroite.

Définition : Forme canonique

Toute fonction quadratique peut s'écrire sous la **forme canonique**

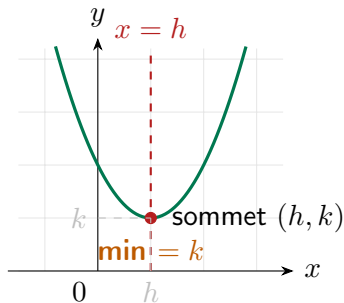
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

où le **sommet** de la parabole est le point (h, k) .

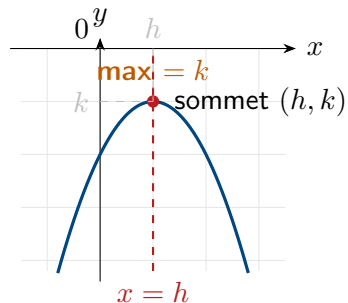
- k est la valeur **minimale** (si $a > 0$) ou **maximale** (si $a < 0$) de f .
- $x = h$ est l'**axe de symétrie** de la parabole.
- Cette forme est extrêmement utile : elle donne directement le sommet **sans dériver** !

Forme canonique : graphes

$a > 0$ — minimum



$a < 0$ — maximum



La parabole est **symétrique** par rapport à la droite verticale $x = h$.

Attention au signe de h

Un piège classique

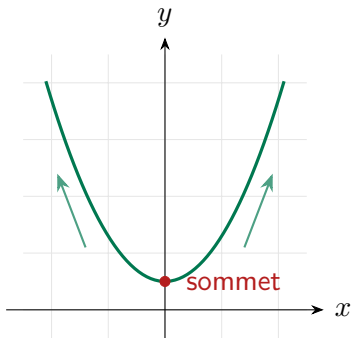
Dans $f(x) = a(x - h)^2 + k$, le sommet est (h, k) – **pas** $(-h, k)$.

Exemple : Deux cas à comparer

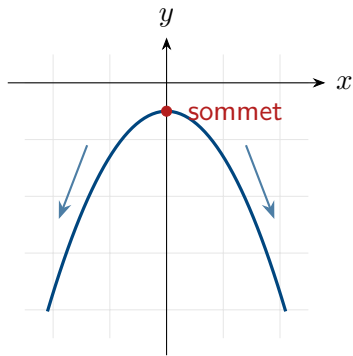
$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 1 \implies \text{sommet } (3, 1)$$

$$f(x) = 2(x + 3)^2 + 1 = 2(x - (-3))^2 + 1 \implies \text{sommet } (-3, 1)$$

Ouverture de la parabole selon le signe de a



$a > 0$ ouverture vers le haut
la parabole admet un **minimum**



$a < 0$ ouverture vers le bas
la parabole admet un **maximum**

Plus $|a|$ est **grand**, plus la parabole est **étroite**.

Plus $|a|$ est **petit**, plus elle est **large**._{24 / 74}

Passer de la forme générale à la forme canonique

Méthode : Complétion du carré

Pour passer de $f(x) = ax^2 + bx + c$ à $f(x) = a(x - h)^2 + k$:

- 1 Mettre a en évidence dans les deux premiers termes seulement :

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$

- 2 Compléter le carré à l'intérieur de la parenthèse : ajouter et soustraire $\left(\frac{b}{2a} \right)^2$.

Passer à la forme canonique (suite)

Méthode : Complétion du carré (suite)

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c$$

- ③ Réécrire le carré parfait et sortir le terme constant de la parenthèse (en le multipliant par a) :

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + c$$

Le résultat final

$$f(x) = a(x - h)^2 + k, \quad h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h)$$

Méthode : En résumé

On peut donc trouver le sommet d'une parabole de **deux façons équivalentes** : par complétion du carré, ou directement avec la formule $h = -\frac{b}{2a}$, $k = f(h)$. Les exemples qui suivent illustrent les deux approches.

Exemple : complétion du carré (avec $a = 1$)

Exemple : $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 5 \\ &= (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 && \left(\left(\frac{-6}{2} \right)^2 = 9 \right) \\ &= (x - 3)^2 - 4 \end{aligned}$$

Sommet : $(3, -4)$. Comme $a = 1 > 0$, c'est un **minimum**.

Vérification rapide : $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$. ✓

Exemple : complétion du carré (avec $a \neq 1$)

Exemple : $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 5 \\ &= 2(x^2 - 4x) + 5 && \text{(on met 2 en évidence)} \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 5 && \left(\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4\right) \\ &= 2((x - 2)^2 - 4) + 5 \\ &= 2(x - 2)^2 - 8 + 5 \\ &= 2(x - 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

Sommet : $(2, -3)$ – un **minimum**, car $a = 2 > 0$.

Exemple : complétion du carré (avec a négatif)

Exemple : $f(x) = -3x^2 + 12x - 7$

$$\begin{aligned}f(x) &= -3x^2 + 12x - 7 \\&= -3(x^2 - 4x) - 7 \quad (\text{attention au signe en évidence !}) \\&= -3(x^2 - 4x + 4 - 4) - 7 \\&= -3(x - 2)^2 + 12 - 7 \\&= -3(x - 2)^2 + 5\end{aligned}$$

Sommet : $(2, 5)$ – un **maximum**, car $a = -3 < 0$.

Un piège fréquent

Attention au signe lors de la mise en évidence

Quand on met -3 en évidence dans $-3x^2 + 12x$, il faut diviser **chaque** terme par -3 :

$$-3x^2 + 12x = -3(x^2 - 4x), \quad \text{pas } -3(x^2 + 4x)$$

Méthode : Comment vérifier

Redistribuez toujours pour vous assurer du résultat :

$$-3(x^2 - 4x) = -3x^2 + 12x \quad \checkmark$$

$$-3(x^2 + 4x) = -3x^2 - 12x \quad (\text{faux signe !})$$

Raccourci : la formule du sommet

Méthode : Formule directe pour le sommet

On peut aussi obtenir le sommet (h, k) directement, sans compléter le carré :

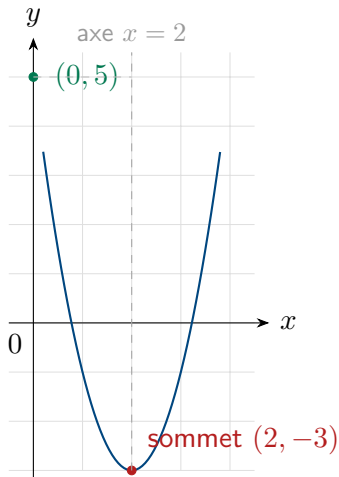
$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h)$$

Exemple : Avec $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

$$h = -\frac{-8}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2, \quad k = f(2) = 2(4) - 8(2) + 5 = 8 - 16 + 5 = -3$$

On retrouve bien le sommet $(2, -3)$, comme à l'exemple précédent.

Graphe d'une fonction quadratique



Pour $f(x) = 2(x - 2)^2 - 3$:

- Sommet : $(2, -3)$, un minimum ($a = 2 > 0$).
- Axe de symétrie : $x = 2$.
- Ordonnée à l'origine :
 $f(0) = 2(4) - 3 = 5$.
- La parabole est symétrique par rapport à la droite verticale $x = 2$.

Exercice : Trouvez le sommet par complétion du carré

① $f(x) = x^2 + 4x + 1$

② $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

③ $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$

Exercices : forme canonique

Exercice : Trouvez le sommet par complétion du carré

- ❶ $f(x) = x^2 + 4x + 1$
- ❷ $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$
- ❸ $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$

Méthode : Solutions

- ❶ $f(x) = (x + 2)^2 - 3$, sommet $(-2, -3)$.
- ❷ $f(x) = -2(x - 1)^2 + 5$, sommet $(1, 5)$.
- ❸ $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$, sommet $(1, 5)$.

§2

Propriétés des puissances

exposants entiers et rationnels

Lois des exposants (rappel)

Définition : Lois des exposants, $a, b \neq 0, m, n \in \mathbb{R}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Erreur classique à éviter

$a^m \cdot a^n \neq a^{mn}$! On **additionne** les exposants pour un produit, on les **multiplie** seulement pour une puissance de puissance $(a^m)^n$.

Exemples : application directe des lois

Exemple : Simplifications numériques et littérales

$$x^3 \cdot x^5 = x^8$$

$$\frac{x^7}{x^2} = x^5$$

$$(x^2)^4 = x^8$$

$$(2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{9}$$

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

Distribuer une puissance sur un produit

Méthode : Stratégie

Pour simplifier (produit de plusieurs facteurs)^{*n*}, on distribue la puissance *n* **sur chaque facteur**, puis on multiplie les exposants quand on rencontre une puissance déjà élevée à une puissance.

Exemple : $(2x^3)^2$

$$(2x^3)^2 = 2^2 \cdot (x^3)^2 = 4 \cdot x^6 = 4x^6$$

Exemple : $(-3x^2y)^3$

$$(-3x^2y)^3 = (-3)^3(x^2)^3y^3 = -27x^6y^3$$

Exemple combiné : puissance, produit et division

Exemple : Simplifier $(2x^3)^2 \cdot x^{-2}$

$$\begin{aligned}(2x^3)^2 \cdot x^{-2} &= 4x^6 \cdot x^{-2} \\ &= 4x^{6+(-2)} \\ &= 4x^4\end{aligned}$$

Exemple combiné : avec deux variables

Exemple : Simplifier $\frac{(3x^2y^3)^2}{6x^3y}$

$$\begin{aligned}\frac{(3x^2y^3)^2}{6x^3y} &= \frac{9x^4y^6}{6x^3y} \\ &= \frac{9}{6} \cdot x^{4-3} \cdot y^{6-1} \\ &= \frac{3}{2}xy^5\end{aligned}$$

Définition : Exposant rationnel

Pour $a \geq 0$ (et n entier positif), on définit

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

et plus généralement, pour m, n entiers positifs,

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Les **mêmes lois des exposants** s'appliquent, que l'exposant soit entier ou rationnel !

Conversions de base entre puissances et radicaux

Exemple : Quelques conversions essentielles

$$x^{1/2} = \sqrt{x}, \quad x^{1/3} = \sqrt[3]{x}, \quad x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$

Remarque

L'exposant $\frac{m}{n}$ se lit : **racine** n -ième, puis **puissance** m (ou l'inverse – les deux donnent le même résultat lorsque $a \geq 0$).

Exemples numériques : exposants rationnels

Exemple : Évaluer sans calculatrice

$$8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$9^{-1/2} = \frac{1}{9^{1/2}} = \frac{1}{3}$$

Une astuce pour évaluer rapidement

Méthode : Astuce

Pour $a^{m/n}$, il est presque toujours plus facile de prendre la racine **en premier** (petits nombres), puis d'élever à la puissance m – plutôt que d'élever a à la puissance m d'abord (grands nombres) avant de prendre la racine.

Exemple : Comparaison

Pour $16^{3/4}$: calculer $\sqrt[4]{16} = 2$ puis $2^3 = 8$ est bien plus simple que calculer $16^3 = 4096$ puis $\sqrt[4]{4096}$.

Distribuer des exposants rationnels

Exemple : $(x^4y^{-2})^{1/2}$, avec $x, y > 0$

$$\begin{aligned}(x^4y^{-2})^{1/2} &= (x^4)^{1/2}(y^{-2})^{1/2} \\ &= x^{4 \cdot \frac{1}{2}} y^{-2 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= x^2 y^{-1} = \frac{x^2}{y}\end{aligned}$$

Exemple : $x^{1/2} \cdot x^{3/2}$

$$x^{1/2} \cdot x^{3/2} = x^{1/2+3/2} = x^{4/2} = x^2$$

Distribuer des exposants rationnels (suite)

Exemple : $\frac{x^{5/3}}{x^{2/3}}$

$$\frac{x^{5/3}}{x^{2/3}} = x^{5/3-2/3} = x^{3/3} = x^1 = x$$

Ce qu'il faut retenir

Les lois des exposants (produit, quotient, puissance de puissance) s'appliquent **sans exception** aux exposants rationnels – il suffit d'additionner, soustraire ou multiplier les fractions comme d'habitude.

Exercice : Simplifiez complètement

① $(3x^2)^3$

② $\frac{(2x^4)^2}{4x^5}$

③ $25^{3/2}$

④ $(x^{2/3})^{3/4}$

⑤ Réécrivez $\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$ avec un exposant négatif.

Exercices : puissances – solutions

Méthode : Solutions

① $27x^6$

② $\frac{4x^8}{4x^5} = x^3$

③ $25^{3/2} = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$

④ $x^{2/3 \cdot 3/4} = x^{1/2}$

⑤ $3x^{-2/3}$

§3

Factorisation

et simplification de fonctions rationnelles

Pourquoi factoriser ?

Lien avec le calcul différentiel

En calcul différentiel, on factorise pour :

- **simplifier** une fonction rationnelle avant de calculer une limite (éviter une forme $\frac{0}{0}$) ;
- trouver les **zéros** d'une fonction (points critiques, intersections avec l'axe des x) ;
- déterminer le **domaine** d'une fonction rationnelle.

Quatre techniques à maîtriser aujourd'hui :

- ① Mise en évidence simple (facteur commun)
- ② Différence de carrés
- ③ Méthode somme-produit
- ④ Formule quadratique (quand la somme-produit ne fonctionne pas)

Technique 1 : mise en évidence (facteur commun)

Méthode : Idée

On cherche le plus grand facteur commun à tous les termes, et on le sort par distribution inverse :

$$ax + ay = a(x + y)$$

Exemple : $6x^3 - 9x^2$

$$6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3)$$

Exemple : $4x^2y - 8xy^2 + 12xy$

$$4x^2y - 8xy^2 + 12xy = 4xy(x - 2y + 3)$$

Technique 2 : différence de carrés

Définition : Différence de carrés

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Exemple : $x^2 - 9$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

Exemple : $4x^2 - 25$

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

Différence de carrés (suite)

Exemple : $9x^2 - 16y^2$

$$9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2 = (3x - 4y)(3x + 4y)$$

Piège

$a^2 + b^2$ (une *somme* de carrés) **ne se factorise pas** sur les réels ! Seule la *différence* se factorise ainsi.

Rappel : la formule quadratique

Formule quadratique

Les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) sont

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant**.

- Si $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$: une racine double (racine réelle unique).
- Si $\Delta < 0$: aucune racine réelle (le polynôme ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$).

Le lien entre racines et factorisation

Méthode : Lien avec la factorisation

Si r_1, r_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c = 0$, alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Pourquoi c'est utile

Cette formule fonctionne **toujours** – même quand la méthode somme-produit échoue (racines non entières, par exemple). C'est donc une méthode de factorisation universelle.

Exemple : utiliser la formule quadratique pour factoriser

Exemple : $2x^2 + 3x - 5$

Exemple : utiliser la formule quadratique pour factoriser

Exemple : $2x^2 + 3x - 5$

Ici $a = 2, b = 3, c = -5$. Discriminant :

$$\Delta = 3^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$$

Racines :

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 7}{4} \implies x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{5}{2}$$

Factorisation :

$$2x^2 + 3x - 5 = 2(x - 1) \left(x + \frac{5}{2}\right) = (x - 1)(2x + 5)$$

Technique 3 : méthode somme-produit (cas $a = 1$)

Méthode : Principe – pour $x^2 + bx + c$

On cherche deux nombres p et q tels que

$$p + q = b \quad (\text{la somme}) \quad \text{et} \quad p \cdot q = c \quad (\text{le produit})$$

On obtient alors $x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$.

Exemple : $x^2 - 7x + 12$

On cherche p, q avec $p + q = -7$ et $pq = 12$.

Essai : $p = -3, q = -4$: somme = -7 ✓, produit = 12 ✓.

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

Méthode somme-produit (cas $a \neq 1$)

Méthode : Adaptation pour $ax^2 + bx + c$

- 1 Chercher p, q tels que $p + q = b$ **et** $p \cdot q = a \cdot c$ (et non plus c !).
- 2 Réécrire bx comme $px + qx$.
- 3 Factoriser par groupement (deux paires de termes).

Exemple : $2x^2 + 5x - 3$

Méthode somme-produit (cas $a \neq 1$)

Méthode : Adaptation pour $ax^2 + bx + c$

- 1 Chercher p, q tels que $p + q = b$ **et** $p \cdot q = a \cdot c$ (et non plus c !).
- 2 Réécrire bx comme $px + qx$.
- 3 Factoriser par groupement (deux paires de termes).

Exemple : $2x^2 + 5x - 3$

Ici $a \cdot c = 2 \cdot (-3) = -6$. On cherche $p + q = 5$, $pq = -6$: $p = 6$, $q = -1$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 3 &= 2x^2 + 6x - x - 3 \\ &= 2x(x + 3) - 1(x + 3) \\ &= (x + 3)(2x - 1) \end{aligned}$$

Encore des exemples (cas $a \neq 1$)

Exemple : $3x^2 - 11x + 6$

Exemple : $6x^2 + 7x - 3$

$a \cdot c = -18$. On cherche $p + q = 7$, $pq = -18$: $p = 9$, $q = -2$.

$$6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 + 9x - 2x - 3 = 3x(2x + 3) - 1(2x + 3) = (2x + 3)(3x - 1)$$

Encore des exemples (cas $a \neq 1$)

Exemple : $3x^2 - 11x + 6$

$a \cdot c = 18$. On cherche $p + q = -11$, $pq = 18$: $p = -9$, $q = -2$.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 11x + 6 &= 3x^2 - 9x - 2x + 6 \\ &= 3x(x - 3) - 2(x - 3) \\ &= (x - 3)(3x - 2) \end{aligned}$$

Exemple : $6x^2 + 7x - 3$

Encore des exemples (cas $a \neq 1$)

Exemple : $3x^2 - 11x + 6$

$a \cdot c = 18$. On cherche $p + q = -11$, $pq = 18$: $p = -9$, $q = -2$.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 11x + 6 &= 3x^2 - 9x - 2x + 6 \\ &= 3x(x - 3) - 2(x - 3) \\ &= (x - 3)(3x - 2) \end{aligned}$$

Exemple : $6x^2 + 7x - 3$

$a \cdot c = -18$. On cherche $p + q = 7$, $pq = -18$: $p = 9$, $q = -2$.

$$6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 + 9x - 2x - 3 = 3x(2x + 3) - 1(2x + 3) = (2x + 3)(3x - 1)$$

Exercice : Factorisez complètement

① $x^2 - 5x - 14$

② $4x^2 - 49$

③ $3x^2 + 10x + 8$

④ $5x^2 - 13x - 6$ (utilisez la formule quadratique si nécessaire)

Exercice : Factorisez complètement

- ❶ $x^2 - 5x - 14$
- ❷ $4x^2 - 49$
- ❸ $3x^2 + 10x + 8$
- ❹ $5x^2 - 13x - 6$ (utilisez la formule quadratique si nécessaire)

Méthode : Solutions

- ❶ $(x - 7)(x + 2)$
- ❷ $(2x - 7)(2x + 7)$
- ❸ $(3x + 4)(x + 2)$
- ❹ $(5x + 2)(x - 3)$

Simplifier une fonction rationnelle

Définition : Fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est un quotient de deux polynômes :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

Méthode : Méthode de simplification

- ➊ **Factoriser complètement** le numérateur et le dénominateur.
- ➋ **Annuler** les facteurs communs (en notant les restrictions sur x).
- ➌ Ne **jamais** annuler des termes qui ne sont pas des facteurs (on ne simplifie pas à l'intérieur d'une somme !).

Exemple 1 : simplification de base

Exemple : $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} &= \frac{(x - 3)(x + 3)}{x(x - 3)} \\ &= \frac{x + 3}{x}, \quad x \neq 0, x \neq 3\end{aligned}$$

Erreur fréquente

On ne peut **pas** annuler le x^2 du haut avec le x^2 du bas avant de factoriser :

$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} \neq \frac{-9}{-3x}$. Il faut **toujours factoriser avant de simplifier**.

Exemple 2 : deux factorisations somme-produit

Exemple : $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4} &= \frac{(x + 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{x + 3}{x - 2}, \quad x \neq 2, \quad x \neq -2\end{aligned}$$

- Numérateur : somme-produit avec $p + q = 5$, $pq = 6 \Rightarrow p = 2, q = 3$.
- Dénominateur : différence de carrés.
- Le facteur commun $(x + 2)$ s'annule.

Exemple 3 : avec coefficient $a \neq 1$

Exemple : $\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$

Numérateur : $a \cdot c = -2$, $p + q = -1$, $pq = -2 \Rightarrow p = -2, q = 1$.

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x(x - 1) + 1(x - 1) = (x - 1)(2x + 1)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} &= \frac{(x - 1)(2x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \frac{2x + 1}{x + 1}, \quad x \neq 1, x \neq -1\end{aligned}$$

Exemple 4 : combiner les techniques

Exemple : $\frac{3x^2 + 9x}{x^2 + 5x + 6}$

Numérateur : mise en évidence. Dénominateur : somme-produit ($p = 2, q = 3$).

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 9x}{x^2 + 5x + 6} &= \frac{3x(x + 3)}{(x + 2)(x + 3)} \\ &= \frac{3x}{x + 2}, \quad x \neq -2, \quad x \neq -3\end{aligned}$$

Exemple 4 : combiner les techniques (suite)

Exemple : $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

Numérateur : différence de carrés. Dénominateur : somme-produit ($p = 3, q = -1$).

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 3)} \\ &= \frac{x + 1}{x + 3}, \quad x \neq 1, x \neq -3\end{aligned}$$

Multiplication de fonctions rationnelles

Méthode : Méthode

Comme pour les fractions numériques : **factoriser chaque numérateur et dénominateur**, puis annuler les facteurs communs **avant** de multiplier.

Exemple : $\frac{x^2 - 4}{x + 3} \cdot \frac{x + 3}{x^2 - 2x}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4}{x + 3} \cdot \frac{x + 3}{x^2 - 2x} &= \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 3} \cdot \frac{x + 3}{x(x - 2)} \\ &= \frac{x + 2}{x}, \quad x \neq 0, x \neq 2, x \neq -3\end{aligned}$$

Méthode : Méthode

Diviser, c'est multiplier par l'**inverse** (le « renversement ») de la deuxième fraction :

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Exemple : division de fonctions rationnelles

Exemple : $\frac{x^2 - 4}{x + 1} \div \frac{x - 2}{x^2 - 1}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4}{x + 1} \div \frac{x - 2}{x^2 - 1} &= \frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x - 2} \\ &= \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 1} \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 2} \\ &= (x + 2)(x - 1), \quad x \neq -1, x \neq 2\end{aligned}$$

Une remarque importante

Le résultat n'est pas toujours une fraction

Dans l'exemple précédent, le résultat $(x+2)(x-1)$ est un **polynôme** – toutes les fractions ne restent pas des fractions après simplification ! Mais les restrictions du domaine d'origine ($x \neq -1$, $x \neq 2$) s'appliquent toujours, même si elles ne sont plus visibles dans la forme finale.

Addition de fonctions rationnelles

Méthode : Méthode

Comme pour les fractions numériques : trouver un **dénominateur commun** (idéalement le plus petit, en factorisant chaque dénominateur), réécrire chaque fraction, puis additionner les numérateurs.

Exemple : $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1}$

Dénominateur commun : $(x-2)(x+1)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1} &= \frac{1(x+1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{(x+1) + 3(x-2)}{(x-2)(x+1)}\end{aligned}$$

Exercice : Simplifiez complètement (indiquez les restrictions)

1 $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

2 $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$

3 $\frac{x^2 - 25}{x + 4} \cdot \frac{x + 4}{x^2 - 5x}$

4 $\frac{2}{x + 3} - \frac{1}{x - 1}$

Méthode : Solutions détaillées

$$① \quad \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = \frac{x+4}{x}, \quad x \neq 0, 4$$

$$② \quad \frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+3}{x+1}, \quad x \neq 1, -1$$

$$③ \quad \frac{(x-5)(x+5)}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x(x-5)} = \frac{x+5}{x}, \quad x \neq 0, 4, 5, -4$$

$$④ \quad \frac{2(x-1) - (x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x-5}{(x+3)(x-1)}, \quad x \neq -3, 1$$

Synthèse : la boîte à outils complète

Concept	Formule clé
Fonction linéaire	$f(x) = mx + b$
Fonction quadratique	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Forme canonique	$f(x) = a(x - h)^2 + k$, sommet (h, k)
Formule du sommet	$h = -\frac{b}{2a}$
Formule quadratique	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Différence de carrés	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Exposants rationnels	$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$