# Chapitre 1 - Domaine d'une fonction réelle

## Restrictions, tableaux de signes et fonctions par parties

Notes de cours – Calcul différentiel

Mohamed Nouidha

Collège Sainte-Anne

Session Automne 2026

# Plan


1. Qu'est-ce qu'un domaine?
2. Lire le domaine sur un graphe
3. Fonctions polynomiales et rationnelles
4. Racines et logarithmes
5. Tableaux de signes
6. Fonctions définies par parties

# Rappel : qu'est-ce qu'une fonction?

**Fonction**

Une **fonction réelle** $f$ est une règle qui associe à chaque valeur réelle $x$ d'un ensemble de départ **au plus une** valeur réelle $f(x)$ dans un ensemble d'arrivée.

**Idée clé**

Attention : une fonction n'a **pas besoin d'accepter toutes** les valeurs de $x$. Elle doit seulement donner, pour chaque $x$ qu'elle accepte, un **unique** résultat bien défini (un nombre réel, sans ambiguïté).

Alors, quelles sont les valeurs de $x$ qu'une fonction "accepte"? Peut-on toujours calculer $f(x)$, peu importe $x$? **Non!** C'est exactement ce que le **domaine** va préciser.

# Définition du domaine

## Domaine d'une fonction

Le **domaine** de $f$, noté $\text{dom}(f)$ ou $D_f$, est l'ensemble de **toutes** les valeurs de $x$ pour lesquelles $f(x)$ existe et donne un nombre réel bien défini.

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ est défini}\}$$

## Idée clé

Trouver le domaine, c'est répondre à la question :

*"Pour quelles valeurs de $x$ le calcul de $f(x)$ a-t-il un sens?"*

# Les trois sources de restriction

Dans un calcul, il y a essentiellement **trois** opérations qui peuvent empêcher $f(x)$ d'exister :

### 1. Division

On ne peut **jamais** diviser par 0.

$$\text{dénominateur} \neq 0$$

### 2. Racine paire

Une racine d'indice **pair** exige un radicande $\geq 0$.

$$\sqrt[2n]{\cdot} \Rightarrow \text{radicande} \geq 0$$

### 3. Logarithme

Le logarithme exige un argument **strictement positif**.

$$\log(\cdot) \Rightarrow \text{argument} > 0$$

### Idée clé

S'il n'y a **aucune** de ces trois opérations (ex. polynôme), alors $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

# Domaine à partir d'un graphe

Jusqu'ici, on a trouvé le domaine à partir d'une **expression algébrique**. Mais le domaine se lit tout aussi bien directement sur le **graphe** d'une fonction.

**Idée clé**

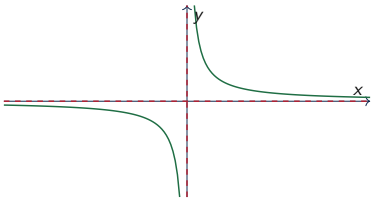
Le domaine d'une fonction, c'est l'**ombre** que projette son graphe sur l'axe des $x$ : on prend chaque point du graphe et on regarde directement en dessous (ou au-dessus) sur l'axe des $x$.

# Qu'est-ce qu'une asymptote?

**Idée intuitive**

Une **asymptote** est une droite dont le graphe se rapproche **de plus en plus près**, sans jamais la toucher ni la croiser peu importe jusqu'où on suit la courbe.

**Graphe de $f(x) = \dfrac{1}{x}$**



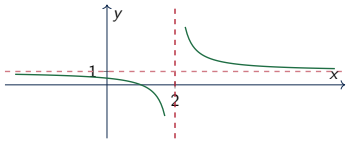

Deux droites pointillées ici : une **verticale** ($x = 0$) et une **horizontale** ($y = 0$). La courbe s'en approche indéfiniment, mais ne les touche jamais.

# Asymptote verticale et domaine

**Pourquoi une asymptote verticale exclut une valeur**

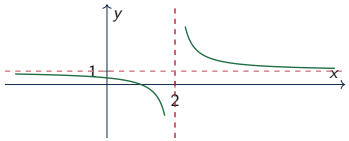
Si le graphe "explose" vers $+\infty$ ou $-\infty$ en s'approchant d'une droite verticale $x = a$, c'est justement parce que $f(a)$ **n'existe pas** (il n'y a aucune hauteur finie à atteindre en $x = a$).

**Graphe de $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$**



# Ne pas confondre verticale et horizontale

**Graphe de $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$ (rappel)**




**Attention !! Ne pas confondre**

L'asymptote **verticale** ($x = 2$, rouge foncé) exclut $x = 2$ du domaine. L'asymptote **horizontale** ($y = 1$, rouge pâle) décrit seulement le comportement du graphe très loin à gauche/droite, **elle n'exclut aucune valeur de** $x$!

# Méthode : projeter sur l'axe des $x$

## Ce qu'il faut repérer

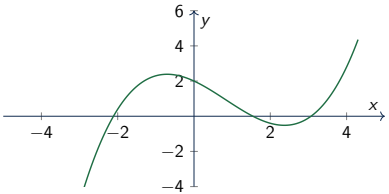
- Un **point plein** ($\bullet$) : cette valeur de $x$ est **incluse** dans le domaine.
- Un **point creux** ($\circ$) : cette valeur de $x$ est **exclue** du domaine.
- Une **flèche** : le graphe continue indéfiniment dans cette direction.
- Une **asymptote verticale** (pointillée) : cette valeur de $x$ est toujours **exclue**.
- Un **trou** dans le graphe (rien n'est dessiné) : ces valeurs de $x$ sont **exclues**.

## Attention

On ne regarde **que** l'axe des $x$ (l'étendue horizontale du graphe). La hauteur du graphe (axe des $y$) concerne l'**image**, pas le domaine. Une asymptote **horizontale** n'a donc aucun effet sur le domaine.

# Exemple 1 : fonction polynomiale

**Graphe de $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$**



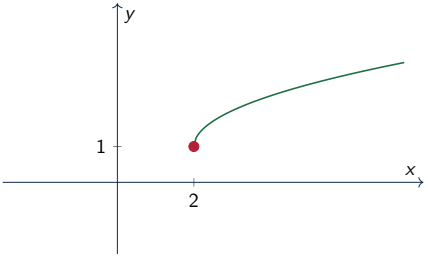

Le graphe s'étend indéfiniment à gauche et à droite, sans interruption ni asymptote.

**Idée clé**

Aucun point creux, aucun trou, aucune asymptote : $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. **Toute** fonction polynomiale a ce type de graphe.

# Exemple 2 : fonction racine carrée

**Graphe de $f(x) = \sqrt{x-2}+1$**



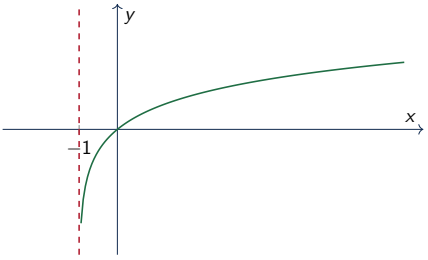

Le graphe **commence** en un point plein, puis s'étend vers la droite seulement.

**Idée clé**

Point plein en $x = 2$ (inclus), puis flèche vers la droite : $\mathrm{dom}(f) = [2, \infty[$.

# Exemple 3 : fonction logarithme

**Graphe de $f(x) = \ln(x+1)$**




Le graphe **s'approche** de la droite pointillée sans jamais la toucher, puis s'étend vers la droite.

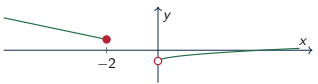
**Idée clé**

Asymptote verticale en $x = -1$ (exclue, point creux implicite) : $\mathrm{dom}(f) = ]-1, \infty[$.

# Exemple 4 : courbe en plusieurs parties

## Graphe composé de deux parties distinctes

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si } -6 \leq x \leq -2 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2} - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$




Un **trou** entre $x = -2$ et $x = 0$ : rien n'est dessiné à cet endroit.

## Idée clé

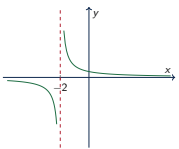
Point plein en $x = -2$ (inclus, fin de la première partie), puis **trou**, puis point creux en $x = 0$ (exclu, début de la seconde partie) : $\text{dom}(f) = ]-\infty, -2] \cup ]0, \infty[$.

*On étudiera en détail ce type de fonction (dite "définie par parties") plus loin dans ce chapitre.*

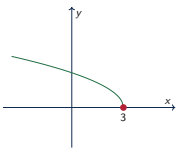
# Exercices : lire le domaine sur un graphe

**À vous de jouer!**

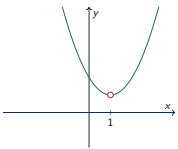
Déterminez le domaine de chacune des fonctions représentées ci-dessous.




(a)




(b)




(c)

# Solutions

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ : asymptote verticale en $x = -2$, deux branches s'étendant à l'infini de chaque côté :
$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, \infty[$

(b) $f(x) = \sqrt{3-x}$ : point plein en $x = 3$, le graphe s'étend vers la **gauche** seulement :
$\text{dom}(f) = ]-\infty, 3]$

(c) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ : le point $x = 1$ **retiré artificiellement** pour illustrer un "trou" isolé (typique d'une fonction rationnelle simplifiée) :
$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

**Rappel**

Un point creux isolé sur une courbe autrement continue apparaît typiquement pour une fonction rationnelle dont un facteur se **simplifie** algébriquement, la valeur qui annulait le dénominateur reste exclue du domaine, même si elle "disparaît" du calcul après simplification. *(On verra un exemple concret de ce piège à l'Exemple 9.)*

# Exemple 5

Trouver le domaine de $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

# Exemple 5

Trouver le domaine de $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

**Solution :** Aucune division, racine ou logarithme. On peut évaluer $f(x)$ pour **tout** $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} = ]-\infty, \infty[$$

# Exemple 5

Trouver le domaine de $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

**Solution :** Aucune division, racine ou logarithme. On peut évaluer $f(x)$ pour **tout** $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} = ]-\infty, \infty[$$

**Règle générale :** le domaine de tout polynôme est toujours $\mathbb{R}$.

# Cas 2 : fonctions rationnelles

**Méthode**

Pour $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, on exclut les valeurs de $x$ qui annulent le **dénominateur** $q(x)$.

1. Poser $q(x) = 0$.
2. Résoudre pour $x$.
3. Exclure ces valeurs du domaine.

**Exemple 6**

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$.

# Cas 2 : fonctions rationnelles

## Méthode

Pour $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, on exclut les valeurs de $x$ qui annulent le **dénominateur** $q(x)$.

1. Poser $q(x) = 0$.
2. Résoudre pour $x$.
3. Exclure ces valeurs du domaine.

## Exemple 6

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$.

**Solution :** $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. On exclut $x = 3$.

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} = ]-\infty, 3[ \cup ]3, \infty[$$

# Exemple 7

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

# Exemple 7

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

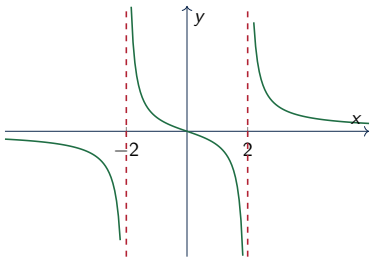
**Solution :**

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, 2[ \cup ]2, \infty[$$

# Graphe de l'exemple 7

**Graphe de** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$




Les asymptotes verticales (rouge) marquent les valeurs exclues du domaine.

# Exemple 8

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

# Exemple 8

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

**Solution :** On factorise le dénominateur :

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \text{ ou } x = 3$$

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, 2[ \cup ]2, 3[ \cup ]3, \infty[$$

# Exemple 8

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

**Solution :** On factorise le dénominateur :

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \text{ ou } x = 3$$

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, 2[ \cup ]2, 3[ \cup ]3, \infty[$$

**Erreur fréquente**

Ne pas oublier de **factoriser** avant de conclure! Un dénominateur qui semble "compliqué" cache souvent plusieurs restrictions.

# Exemple 9 : Ne jamais simplifier avant de conclure le domaine

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-2x-15}$.

# Exemple 9 : Ne jamais simplifier avant de conclure le domaine

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-2x-15}$.

**Solution :** On factorise le dénominateur :

$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3) \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -3$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 5\} = ]-\infty, -3[ \cup ]-3, 5[ \cup ]5, \infty[$$

# Pourquoi ce piège est dangereux

## Piège classique

Si on **simplifie d'abord**, le facteur $(x+3)$ s'annule au numérateur et au dénominateur :

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-5)(x+3)} = \frac{1}{x-5}$$

On pourrait croire que seul $x = 5$ est exclu! Mais $x = -3$ reste **exclu du domaine de** $f$, car $f(-3)$ n'existe pas dans l'expression **originale** même si la version simplifiée, elle, semble bien définie en $x = -3$.

## Idée clé

**Règle d'or :** on détermine **toujours** le domaine à partir de l'expression **avant** toute simplification.

# Exemple 10 : racines carrées (indice pair)

**Méthode**

Pour $f(x) = \sqrt{g(x)}$, on exige $g(x) \geq 0$ et on résout cette **inéquation**.

# Exemple 10 : racines carrées (indice pair)

**Méthode**

Pour $f(x) = \sqrt{g(x)}$, on exige $g(x) \geq 0$ et on résout cette **inéquation**.

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{x-5}$.

# Exemple 10 : racines carrées (indice pair)

**Méthode**

Pour $f(x) = \sqrt{g(x)}$, on exige $g(x) \geq 0$ et on résout cette **inéquation**.

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{x-5}$.

**Solution :** $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$.

$$\text{dom}(f) = [5, \infty[$$

# Exemple 11

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

# Exemple 11

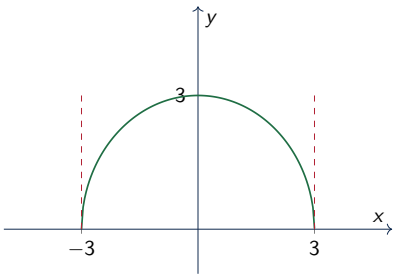
Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

**Solution :** $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$.

$$\text{dom}(f) = [-3, 3]$$

# Graphe de l'exemple 11

**Graphe de $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ (demi-cercle)**




Le graphe existe uniquement sur $[-3, 3]$ : en dehors, le radicande serait négatif.

# Exemple 12 : racine au dénominateur

**Attention – combinaison de restrictions**

Si la racine paire se trouve au **dénominateur**, l'inégalité devient **stricte** : le radicande ne peut pas être nul non plus (division par 0 interdite).

# Exemple 12 : racine au dénominateur

**Attention – combinaison de restrictions**

Si la racine paire se trouve au **dénominateur**, l'inégalité devient **stricte** : le radicande ne peut pas être nul non plus (division par 0 interdite).

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

# Exemple 12 : racine au dénominateur

**Attention – combinaison de restrictions**

Si la racine paire se trouve au **dénominateur**, l'inégalité devient **stricte** : le radicande ne peut pas être nul non plus (division par 0 interdite).

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

**Solution :** On exige $x - 1 > 0$ (strictement, car $\sqrt{x-1}$ ne peut pas être 0 au dénominateur).

$$\text{dom}(f) = ]1, \infty[$$

# Exemple 13 : logarithmes

**Méthode**

Pour $f(x) = \ln(g(x))$ ou $\log_b(g(x))$, on exige $g(x) > 0$ (strictement).

# Exemple 13 : logarithmes

**Méthode**

Pour $f(x) = \ln(g(x))$ ou $\log_b(g(x))$, on exige $g(x) > 0$ (strictement).

Trouver le domaine de $f(x) = \ln(x + 3)$.

# Exemple 13 : logarithmes

**Méthode**

Pour $f(x) = \ln(g(x))$ ou $\log_b(g(x))$, on exige $g(x) > 0$ (strictement).

Trouver le domaine de $f(x) = \ln(x + 3)$.

**Solution :** $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$.

$$\text{dom}(f) = ]-3, \infty[$$

# Exemple 14 : logarithmes (second exemple)

Trouver le domaine de $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.

# Exemple 14 : logarithmes (second exemple)

Trouver le domaine de $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.

**Solution :** $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2$ ou $x > 2$.

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, -2[ \cup ]2, \infty[$$

# Exemple 15

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$.

# Exemple 15

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$.

**Solution :** Deux restrictions à combiner :

- Racine : $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
- Dénominateur : $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

On prend l'**intersection**, puis on retire le point exclu :

$$\text{dom}(f) = [-1, 2[ \cup ]2, \infty[$$

# Exemple 15

Trouver le domaine de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$.

**Solution :** Deux restrictions à combiner :

- Racine : $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
- Dénominateur : $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

On prend l'**intersection**, puis on retire le point exclu :

$$\text{dom}(f) = [-1, 2[\cup]2, \infty[$$

**Idée clé**

Avec plusieurs restrictions, on résout **chacune séparément**, puis on prend l'**intersection** de tous les ensembles obtenus.

# Exercices

**À vous de jouer!**

Trouver le domaine des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$
2. $f(x) = \sqrt{7-2x}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{x+1}$
4. $f(x) = \ln(5-x)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

# Solutions

1. $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$, donc $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$
2. $7 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$, donc $\text{dom}(f) = ]-\infty, \frac{7}{2}]$
3. $4 - x \geq 0$ et $x \neq -1$, donc $\text{dom}(f) = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 4]$
4. $5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$, donc $\text{dom}(f) = ]-\infty, 5[$
5. $x^2 - 9 > 0$ (strict, racine au dénominateur) $\Rightarrow x < -3$ ou $x > 3$, donc $\text{dom}(f) = ]-\infty, -3[ \cup ]3, \infty[$

# Pourquoi un tableau de signes?

Jusqu'ici, nos inéquations n'avaient qu'**un seul facteur** à analyser. Mais que faire quand l'expression sous une racine (ou dans un log) est un **produit** ou un **quotient** de plusieurs facteurs?

**Exemple**

$$f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)(x-4)}$$

Il faut que $(x-1)(x+2)(x-4) \geq 0$. Impossible à résoudre facilement "à l'œil", le signe du produit dépend de **combien** de facteurs sont négatifs!

# Le rôle du tableau de signes

**À quoi ça sert?**

Le **tableau de signes** est un outil visuel qui permet de suivre, **simultanément** et **sur toute la droite réelle**, le signe de chaque facteur d'une expression pour en déduire le signe du **produit ou du quotient global**.

Il transforme un problème algébrique difficile ("pour quels $x$ ce produit est-il positif?") en une tâche **mécanique et fiable** :

- chaque facteur **linéaire** $(x - a)$ ne change de signe **qu'une seule fois**, en son propre zéro $x = a$;
- il suffit de repérer tous ces zéros, puis de lire le signe de chaque facteur entre eux;
- la **dernière ligne** combine tout (règle des signes), colonne par colonne.

**Sans tableau de signes**

Il faudrait tester le signe du produit "à la main" pour une infinité de valeurs, le tableau réduit ce travail à un nombre fini de cas.

# Comment lire et construire le tableau

## Format du tableau

- Une **ligne** par facteur de l'expression, plus une dernière ligne pour le **signe combiné**.
- Une **barre verticale** pour chaque zéro rencontré, avec sa valeur inscrite **au-dessus**. La première barre correspond à $-\infty$, la dernière à $+\infty$.
- Le **signe** de chaque facteur est inscrit dans la case **entre deux barres consécutives**.
- Sur la ligne d'**un facteur**, son propre zéro est toujours une barre **simple** avec un 0 même s'il est au dénominateur, car lui-même y est parfaitement défini.
- C'est seulement sur la ligne du **signe combiné** qu'une valeur interdite (zéro d'un dénominateur) devient une **barre double**.

## Idée clé

Une fois le tableau rempli, le **domaine se lit directement** sur la dernière ligne : on prend les intervalles (et éventuellement les zéros) où le signe correspond à l'inégalité recherchée.

# Méthode générale

## Construire un tableau de signes : 5 étapes

1. **Factoriser** complètement l'expression (produit ou quotient de facteurs simples).
2. Trouver les **valeurs critiques** : les zéros de **chaque** facteur (numérateur *et* dénominateur).
3. Placer ces valeurs **en ordre croissant** : elles deviennent les barres verticales du tableau.
4. Pour **chaque facteur**, déterminer son signe dans chaque case (le facteur ne change de signe qu'en traversant son propre zéro).
5. **Combiner** les signes ligne par ligne (règle des signes d'un produit/quotient) pour obtenir le signe global, puis lire le domaine.

## Attention

Un zéro du **dénominateur** est **toujours** exclu du domaine, même si l'inégalité est large ($\geq$), d'où la barre double sur la ligne combinée. Un zéro du **numérateur** peut être inclus si l'inégalité est large.

# Exemple 16

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$.

# Exemple 16

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$.

On exige $\dfrac{x-1}{x+3} \geq 0$ **et** $x \neq -3$ — exactement le genre de situation où le tableau de signes s'impose.
Valeurs critiques : $x = -3$ (dénominateur, barre double), $x = 1$ (numérateur).

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Quotient | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\mathrm{dom}(f) = ]-\infty, -3[ \cup [1, \infty[$$

# Exemple 17

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)(x-4)}$.

# Exemple 17

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)(x-4)}$.

**Étape 1–2 :** déjà factorisé; valeurs critiques : $x = -2,\ 1,\ 4$.
**Étape 3–5 :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Produit | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

# Exemple 17

On lit directement la dernière ligne : le produit est $\geq 0$ (positif ou nul) sur $[-2, 1]$ et sur $[4, \infty[$.

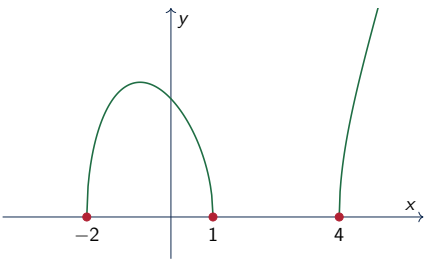
$$\text{dom}(f) = [-2, 1] \cup [4, \infty[$$

**Idée clé**

Les zéros $x = -2, 1, 4$ sont **inclus** : ce sont des zéros du radicande (numérateur), pas d'un dénominateur, et l'inégalité est **large** ($\geq 0$).

# Graphe de l'exemple 17

**Graphe de $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)(x-4)}$**




Deux "morceaux" de graphe correspondant aux deux intervalles où le radicande est $\geq 0$; rien n'existe entre $x = 1$ et $x = 4$.

# Exemple 18

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-4}}$.

# Exemple 18

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-4}}$.

Valeurs critiques : $x = -2,\ 1$ (numérateur), $x = 4$ (dénominateur, **exclu** — barre double).

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Quotient | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

$$\mathrm{dom}(f) = [-2, 1] \cup ]4, \infty[$$

# Exemple 18

**Comparer avec l'exemple 17!**

Même numérateur, mais ici $x = 4$ annule le **dénominateur** : barre double, valeur **exclue**, même si le reste de l'intervalle ($x > 4$) fait partie du domaine.

$$\text{dom}(f) = [-2, 1] \cup ]4, \infty[ \qquad \text{et non } [-2, 1] \cup [4, \infty[$$

**Idée clé**

Toujours vérifier **séparément** chaque zéro : vient-il du numérateur ou du dénominateur? C'est ce qui détermine si on trace une barre simple (avec 0) ou une barre double sur la ligne combinée.

# Exemple 19

Trouver le domaine de $f(x) = \ln\big((x-2)(x+3)\big)$.

# Exemple 19

Trouver le domaine de $f(x) = \ln\big((x-2)(x+3)\big)$.

On exige $(x-2)(x+3) > 0$ (**strict**, car c'est un logarithme). Valeurs critiques : $x = -3,\ 2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Produit | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Comme l'inégalité est **stricte** ($> 0$), les zéros $x = -3$ et $x = 2$ sont **exclus** même s'ils portent une barre simple :

$$\mathrm{dom}(f) = ]-\infty, -3[ \cup ]2, \infty[$$

# Exemple 20

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x+2}}$.

# Exemple 20

Trouver le domaine de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x+2}}$.

Valeurs critiques : $x = -2$ (dénominateur, barre double), $x = 0$, $x = 3$ (numérateur).

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| Quotient | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\mathrm{dom}(f) = ]-2, 0] \cup [3, \infty[$$

# Exercices

**À vous de jouer!**

Trouver le domaine des fonctions suivantes à l'aide d'un tableau de signes :

1. $f(x) = \sqrt{(2-x)(x+4)}$
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x-3)(x-5)}}$

# Solution : exercice 1

$(2-x)(x+4) \geq 0$. Valeurs critiques : $x = -4,\ 2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Produit | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$\mathrm{dom}(f) = [-4, 2]$ (les deux zéros sont inclus, inégalité large)

# Solution : exercice 2

$\frac{x-1}{x+5} > 0$ (strict). Valeurs critiques : $x = -5$ (dénominateur, barre double), $x = 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Quotient | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, -5[ \cup ]1, \infty[$$

# Solution : exercice 3

Racine au **dénominateur** $\Rightarrow$ inégalité stricte $(x+1)(x-3)(x-5) > 0$, et les **trois** zéros sont des valeurs interdites (barres doubles).

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-5$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Produit | | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | |

$$\mathrm{dom}(f) = ]-1, 3[ \cup ]5, \infty[$$

# Qu'est-ce qu'une fonction par parties?

**Fonction définie par parties**

Une fonction définie **par parties** (ou *morceaux*) est une fonction dont la règle de correspondance **change** selon la valeur de $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in I_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in I_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & \text{si } x \in I_n \end{cases}$$

où les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sont **disjoints** (ne se chevauchent pas).

# Domaine d'une fonction par parties

## Idée clé

Le domaine total d'une fonction par parties est **l'union** :

1. des intervalles $I_k$ donnés dans la définition **eux-mêmes**,
2. **intersectés** avec le domaine naturel de chaque morceau $f_k(x)$ (s'il y a une racine, un log, etc. *à l'intérieur* du morceau).

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{k=1}^{n} \Big( I_k \cap \mathrm{dom}(f_k) \Big)$$

## Point essentiel

Il faut toujours vérifier **deux choses** : (1) est-ce que $f_k(x)$ existe mathématiquement sur $I_k$ ? et (2) $I_k$ lui-même fait-il partie du domaine "voulu" par la définition ?

# Exemple 21 : cas simple, sans restriction interne

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

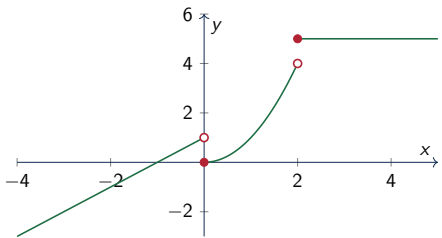
**Solution :** Chaque morceau ($x+1$, $x^2$, 5) est un polynôme, son domaine naturel est par conséquent égal à $\mathbb{R}$, donc aucune restriction interne. Les intervalles $I_k$ couvrent :

$$]-\infty, 0[ \cup [0, 2[ \cup [2, \infty[ = \mathbb{R}$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

# Graphe de l'exemple 21

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$




Le graphe est continu partout sauf en $x = 0$ et $x = 2$ (saut) mais il est **défini** pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

# Exemple 22

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

# Exemple 22

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Solution :**

- Pour $\sqrt{x}$ : domaine naturel $[0, \infty[$, intersecté avec $I_1 = [0, \infty[ \Rightarrow [0, \infty[$.
- Pour $-x$ : domaine naturel $\mathbb{R}$, intersecté avec $I_2 = ]-\infty, 0[ \Rightarrow ]-\infty, 0[$.

$$\text{dom}(f) = [0, \infty[ \cup ]-\infty, 0[ = \mathbb{R}$$

# Exemple 23

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

# Exemple 23

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

**Solution :**

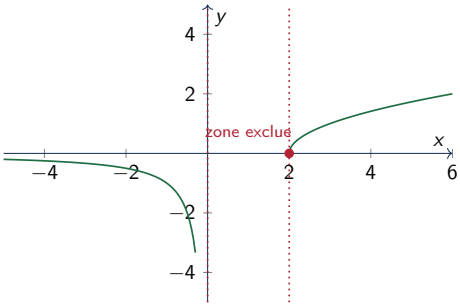
- Morceau 1 : $\dfrac{1}{x}$ a pour domaine naturel $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; intersecté avec $I_1 = ]-\infty, 0[ \Rightarrow ]-\infty, 0[$ (le 0 est déjà exclu par $I_1$).
- Morceau 2 : $\sqrt{x-2}$ exige $x \geq 2$; intersecté avec $I_2 = [2, \infty[ \Rightarrow [2, \infty[$.

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, 0[ \cup [2, \infty[$$

**Remarquez :** l'intervalle $[0, 2[$ n'est couvert par **aucun** morceau — il n'appartient pas au domaine!

# Graphe de l'exemple 23

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$




Aucune portion du graphe n'existe entre $x = 0$ et $x = 2$ : $[0, 2[ \not\subset \text{dom}(f)$.

# Exemple 24

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

# Exemple 24

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Solution :**

- Morceau 1 : $\ln(x)$ exige $x > 0$; intersecté avec $I_1 = ]0, 1[ \Rightarrow ]0, 1[$.
- Morceau 2 : $x - 1$ est un polynôme (domaine $\mathbb{R}$); intersecté avec $I_2 = [1, \infty[ \Rightarrow [1, \infty[$.

$$\text{dom}(f) = ]0, 1[ \cup [1, \infty[ = ]0, \infty[$$

# Exemple 24

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Solution :**

- Morceau 1 : $\ln(x)$ exige $x > 0$; intersecté avec $I_1 = ]0, 1[ \Rightarrow ]0, 1[$.
- Morceau 2 : $x - 1$ est un polynôme (domaine $\mathbb{R}$); intersecté avec $I_2 = [1, \infty[ \Rightarrow [1, \infty[$.

$$\text{dom}(f) = ]0, 1[ \cup [1, \infty[ = ]0, \infty[$$

**Idée clé**

Même si les morceaux se "recollent" parfaitement ici, on note bien que $x \leq 0$ reste exclu à cause du logarithme.

# Exemple 25

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

# Exemple 25

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

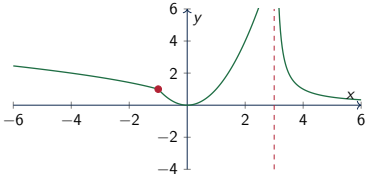
**Solution :**

- $\sqrt{-x}$ : domaine naturel $x \leq 0$; $\cap\, I_1 = ]-\infty, -1] \Rightarrow ]-\infty, -1]$
- $x^2$ : domaine $\mathbb{R}$; $\cap\, I_2 = ]-1, 3[ \Rightarrow ]-1, 3[$
- $\dfrac{1}{x-3}$ : domaine naturel $x \neq 3$; $\cap\, I_3 = [3, \infty[ \Rightarrow ]3, \infty[$ *(le point $x = 3$ est retiré car $\frac{1}{x-3}$ n'existe pas là!)*

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, -1] \cup ]-1, 3[ \cup ]3, \infty[ = ]-\infty, 3[ \cup ]3, \infty[$$

# Graphe de l'exemple 25

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$




La droite verticale rouge en $x = 3$ est une asymptote : $x = 3$ est exclu du domaine.

# Exercices

## À vous de jouer!

Trouver le domaine de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ \ln(x+2) & \text{si } x > -2 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

# Solutions

1. Morceau 1 : $\mathbb{R}$, $\cap\,]-\infty, 1[ \Rightarrow\, ]-\infty, 1[$. Morceau 2 : $x \geq 1$, $\cap\,[1, \infty[ \Rightarrow\, [1, \infty[$.

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

2. Morceau 1 : $x \neq -2$, $\cap\,]-\infty, -2[ \Rightarrow\, ]-\infty, -2[$. Morceau 2 : $x > -2$, $\cap\,]-2, \infty[ \Rightarrow\, ]-2, \infty[$.

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, -2[ \cup\, ]-2, \infty[ = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

3. Morceau 1 : $[-2, 2]$ déjà valide $\cap\,[-2, 2] \Rightarrow [-2, 2]$. Morceau 2 : $\mathbb{R} \cap\, ]3, \infty[ \Rightarrow\, ]3, \infty[$.

$$\text{dom}(f) = [-2, 2] \cup\, ]3, \infty[ \quad \text{(noter le trou } ]2, 3])$$

4. Morceau 1 : $x \neq 1$, $\cap\,]-\infty, 0] \Rightarrow\, ]-\infty, 0]$ (le 1 n'y est pas de toute façon). Morceau 2 : $x \geq 0$, $\cap\,]0, \infty[ \Rightarrow\, ]0, \infty[$.

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

# Résumé

**À retenir**

- Sur un **graphe** : le domaine est la projection du graphe sur l'axe des $x$ : point plein (inclus), point creux (exclu), asymptote verticale (exclue), trou (exclu). L'asymptote **horizontale**, elle, n'exclut aucune valeur de $x$.
- Trois sources de restriction algébrique : **division** ($\neq 0$), **racine paire** ($\geq 0$, ou $> 0$ si au dénominateur), **logarithme** ($> 0$).
- Avec plusieurs restrictions : résoudre chacune, puis **intersecter**.
- Un **tableau de signes** permet de traiter un produit/quotient de plusieurs facteurs : une ligne par facteur, une barre verticale par zéro, une barre **double** pour toute valeur qui annule un dénominateur.
- Pour une fonction par parties : trouver le domaine naturel de **chaque morceau**, l'**intersecter** avec l'intervalle $I_k$ donné, puis faire l'**union** de tous les morceaux.
- Le domaine d'une fonction par parties n'est **pas toujours** $\mathbb{R}$ (il peut y avoir des trous!)