

Chapitre 3 - Limites à l'infini

Polynômes, logarithmes, exponentielles et comparaison des croissances

Mohamed Noudha

Collège Sainte-Anne

À la fin de ces notes, vous devriez être capable de :

- déterminer le comportement d'un **polynôme** quand $x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty$;
- analyser une fonction **logarithmique** (domaine, asymptote verticale, limites);
- analyser une fonction **exponentielle** (domaine, limites à $\pm\infty$, croissance/décroissance);
- **comparer** la vitesse de croissance de $\ln(x)$, x^p et e^x ;
- résoudre des limites qui combinent plusieurs de ces fonctions.

Plan

- 1 Mise en contexte : une course à l'infini
- 2 Fonctions polynomiales à l'infini
- 3 Fonctions logarithmiques
- 4 Fonctions exponentielles
- 5 Limite d'une fonction composée
- 6 Comparaison des croissances à l'infini

Une image pour commencer

Imaginez trois coureurs qui partent en même temps et courent indéfiniment :

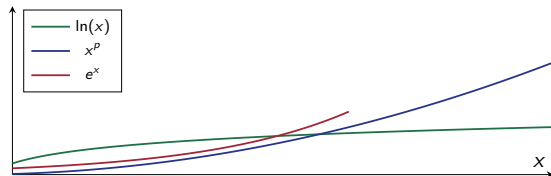
$\ln$ le coureur **lent** : il avance, mais de moins en moins vite;

x^p le coureur **régulier** : vitesse raisonnable et stable;

e^x le coureur **fusée** : il accélère sans cesse.

Idée intuitive

Peu importe qui est en tête au départ, **à très long terme** c'est toujours e^x qui gagne, puis x^p , puis $\ln(x)$ arrive loin derrière. Tout ce chapitre consiste à rendre cette idée **rigoureuse et calculable**.



Idée clé : le terme dominant

Soit un polynôme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Principe

Quand $x \rightarrow \pm\infty$, le terme $a_n x^n$ **domine** tous les autres :

$$P(x) \sim a_n x^n \quad (\text{à l'infini}).$$

Le comportement de $P(x)$ à l'infini est donc essentiellement celui de $a_n x^n$.

Pourquoi le terme dominant domine ?

On factorise par la plus grande puissance :

$$P(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right).$$

Quand $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0, \quad \dots, \quad \frac{1}{x^n} \rightarrow 0,$$

donc

$$P(x) \approx x^n(a_n + 0 + \cdots + 0) = a_n x^n.$$

Remarque

Cette même technique de **mise en évidence de la plus grande puissance** reviendra constamment dans ce chapitre : c'est LE réflexe à avoir devant une forme indéterminée $\infty - \infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Table rapide : comportement de $a_n x^n$ à l'infini

Deux éléments suffisent

- le **degré** n (pair ou impair),
- le **signe** du coefficient dominant a_n .

Terme dominant	$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$
$a_n x^n$, n pair, $a_n > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$a_n x^n$, n pair, $a_n < 0$	$-\infty$	$-\infty$
$a_n x^n$, n impair, $a_n > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a_n x^n$, n impair, $a_n < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Astuce

Truc mnémotechnique : pensez à x^2 (parabole, mêmes branches des deux côtés) contre x^3 (branches opposées). Le signe de a_n ne fait que *retourner* le dessin.

Exemple 1

Exemple

$$P(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5$$

- ❶ Terme dominant : $2x^4$ (degré 4 pair, coefficient $2 > 0$).
- ❷ D'après la table : les deux limites valent $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty.$$

Remarque

Les termes $-7x^2$ et $+5$ influencent la forme *localement* (creux, bosses), mais jamais la tendance quand $|x|$ devient très grand.

Exemple 2

Exemple

$$Q(x) = -3x^5 + 100x^2 - 1$$

Étape 1 — Identifier le terme dominant : $-3x^5$ (degré 5 impair, coefficient $-3 < 0$).

Étape 2 — Rédaction avec équivalence :

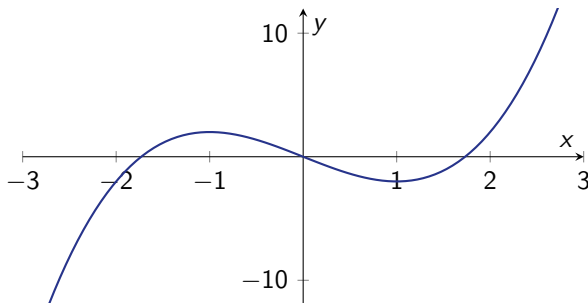
$$Q(x) = -3x^5 \left(1 - \frac{100}{3x^3} + \frac{1}{3x^5} \right) \sim -3x^5 \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

Étape 3 — Conclusion (degré impair, $a_n < 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} Q(x) = +\infty.$$

Illustration graphique : $f(x) = x^3 - 3x$

Terme dominant x^3 (impair, positif) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.



On observe : la courbe descend à gauche ($x \rightarrow -\infty$) et monte à droite ($x \rightarrow +\infty$), exactement comme le prédit le terme dominant x^3 .

Déterminer les limites suivantes :

❶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^6 + 2x^2 - 1)$

❷ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^5 - 100x + 3)$

❸ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-6x^4 + 2x^2 - x^7)$

❹ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 9x^2)$

❺ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 - 1000x\right)$

- ❶ Terme dominant $-5x^6$ (pair, $a_n < 0$) $\Rightarrow$ limite $= -\infty$.
- ❷ Terme dominant $7x^5$ (impair, $a_n > 0$), $x \rightarrow -\infty \Rightarrow$ limite $= -\infty$.
- ❸ Le terme de plus haut degré est $-x^7$ (impair, $a_n < 0$), $x \rightarrow +\infty \Rightarrow$ limite $= -\infty$.
- ❹ Terme dominant $4x^3$ (impair, $a_n > 0$), $x \rightarrow -\infty \Rightarrow$ limite $= -\infty$.
- ❺ Terme dominant $\frac{1}{2}x^2$ (pair, $a_n > 0$) $\Rightarrow$ limite $= +\infty$, malgré le $-1000x$ qui semble « gagner » pour de petites valeurs de x .

Définition et domaine

On considère $g(x) = \ln(x)$.

Domaine

Le logarithme naturel est défini seulement si $x > 0$:

$$\text{Dom}(g) =]0, +\infty[.$$

Valeurs importantes

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1.$$

Astuce

Règle pratique pour trouver le domaine de $\ln(u(x))$: résoudre l'inéquation $u(x) > 0$. C'est **toujours** la première étape avec un logarithme.

Asymptote verticale en $x = 0$

Limite en 0 (par la droite)

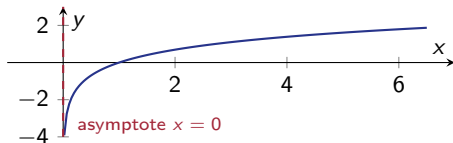
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Donc la droite $x = 0$ est une **asymptote verticale**.

Limite à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty,$$

mais la croissance est **très lente** comparée à une puissance ou une exponentielle (voir section 5).



Exemple : $h(x) = \ln(3x)$

- **Domaine** : $3x > 0 \iff x > 0$, donc $\text{Dom}(h) =]0, +\infty[$.
- **Asymptote verticale** : $x = 0$ (car $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow 3x \rightarrow 0^+$).
- **À l'infini** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3x) = +\infty$.

Propriété utile

$$\ln(3x) = \ln(3) + \ln(x)$$

donc c'est essentiellement la courbe de $\ln(x)$ **déplacée vers le haut** de $\ln(3)$.

Exemple : $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

Exemple : $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

Étape 1 — Poser la condition : il faut $\frac{x-1}{x+2} > 0$.

Exemple : $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

Étape 1 — Poser la condition : il faut $\frac{x-1}{x+2} > 0$. **Étape 2 — Tableau de signes** du quotient

$\frac{x-1}{x+2}$:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	+
$x+2$	-	0	+	+
$\frac{x-1}{x+2}$	+	-	0	+

Exemple : $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

Étape 1 — Poser la condition : il faut $\frac{x-1}{x+2} > 0$. **Étape 2 — Tableau de signes** du quotient

$$\frac{x-1}{x+2} :$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	+
$x+2$	-	0	+	+
$\frac{x-1}{x+2}$	+	-	0	+

Étape 3 — Conclusion :

$$\text{Dom}(f) =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[.$$

- ❶ Trouver le domaine de $f(x) = \ln(x - 2)$.
- ❷ Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2)$.
- ❸ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{10}\right)$.
- ❹ Trouver le domaine de $h(x) = \ln(x^2 - 1)$.
- ❺ Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - 1)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1)$.
- ❻ Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x - 1}{x + 2}\right)$.
- ❼ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + 1) - \ln(x)]$.

- ❶ $x - 2 > 0 \iff x > 2$, donc $\text{Dom}(f) =]2, +\infty[$.
- ❷ Quand $x \rightarrow 2^+$, $x - 2 \rightarrow 0^+$, donc $\ln(x - 2) \rightarrow -\infty$.
- ❸ $\ln\left(\frac{x}{10}\right) = \ln(x) - \ln(10) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.
- ❹ $x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$ ou $x > 1$, donc $\text{Dom}(h) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
- ❺ Dans les deux cas, $x^2 - 1 \rightarrow 0^+$, donc les deux limites valent $-\infty$.
- ❻ Quand $x \rightarrow 1^+$, $\frac{x-1}{x+2} \rightarrow 0^+$ (numérateur $\rightarrow 0^+$, dénominateur $\rightarrow 3$), donc la limite vaut $-\infty$.
- ❼ On réécrit : $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ donc l'argument tend vers 1, et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x)] = \ln(1) = 0.$$

Définition et domaine : $p(x) = e^x$

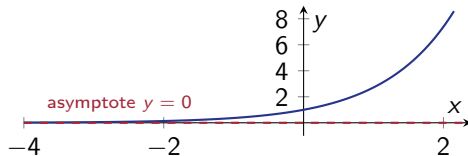
L'exponentielle est définie pour tout réel : $\text{Dom}(p) = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

et la croissance est **très rapide**.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Donc la droite $y = 0$ est une **asymptote horizontale** (à gauche).



Exponentielle décroissante : $q(x) = e^{-x}$

- Domaine : $\mathbb{R}$.
- Quand $x \rightarrow +\infty$, $-x \rightarrow -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.
- Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Astuce

Règle générale : pour e^{kx} ,

- si $k > 0$: même comportement que e^x (croît vers $+\infty$ à droite, tend vers 0 à gauche);
- si $k < 0$: comportement inversé, comme e^{-x} .

Exemple : $f(x) = 2 + e^{-x}$

Quand $x \rightarrow +\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 2 + 0 = 2$.

Quand $x \rightarrow -\infty$: $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

La droite $y = 2$ est une **asymptote horizontale** (à droite seulement).

Remarque

Astuce générale : pour une fonction du type « constante + exponentielle qui tend vers 0 », l'asymptote horizontale est simplement **la constante**.

- ➊ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x}$.
- ➋ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x}$.
- ➌ Déterminer l'asymptote horizontale (s'il y en a) de :
 - ➊ $f(x) = 2 + e^{-x}$
 - ➋ $g(x) = 5 - e^{-2x}$
 - ➌ $h(x) = 3e^x - 1$
- ➍ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right)$ (fonction sigmoïde, très utilisée dans les réseaux de neurones en IA).

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0.$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = +\infty.$

3.a $x \rightarrow +\infty$: $f \rightarrow 2$ (asymptote $y = 2$, à droite). $x \rightarrow -\infty$: $f \rightarrow +\infty$ (pas d'asymptote).

3.b $x \rightarrow +\infty$: $g \rightarrow 5$. $x \rightarrow -\infty$: $e^{-2x} \rightarrow +\infty$ donc $g \rightarrow -\infty$.

3.c $x \rightarrow -\infty$: $e^x \rightarrow 0$ donc $h \rightarrow -1$ (asymptote $y = -1$, à gauche).

③ Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, donc le dénominateur $\rightarrow 1$ et la limite vaut 1.

Un résultat très utile : composer les limites

Jusqu'ici on a étudié $\ln(x)$, e^x ou $P(x)$ **seuls**. Mais souvent l'argument est lui-même une expression qui dépend de x , comme $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ ou $e^{\frac{2x+1}{x+3}}$.

Théorème (limite d'une fonction composée)

Soit $f(u(x))$. Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = L$.

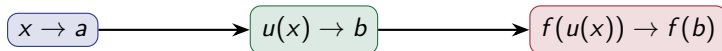
Remarque

Pour les fonctions usuelles ($\ln$, $e^{(\cdot)}$, $\sqrt{\cdot}$, $(\cdot)^n$, $\cos$, $\sin$, $\dots$), cette limite $\lim_{y \rightarrow b} f(y)$ **existe toujours** lorsque b appartient au domaine de f (elle vaut alors simplement $f(b)$), ou lorsque $b = \pm\infty$ ou $0^\pm$ grâce aux limites usuelles déjà vues. C'est ce qui rend la méthode applicable dans presque tous les cas qu'on rencontre.

Méthode en 3 étapes

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x))$

- 1 Calculer $b = \lim_{x \rightarrow a} u(x)$ avec les techniques déjà vues (terme dominant, règle des degrés, ...).
- 2 Identifier le comportement de f en b (valeur si b fini, limite usuelle si $b = \pm\infty$ ou $0^\pm$).
- 3 Conclure : $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = f(b)$ (ou la limite correspondante).



Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

Étape 1 — limite de l'intérieur $u(x) = \frac{x-1}{x+2}$: degrés égaux (numérateur et dénominateur de degré 1), donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Étape 2 — on connaît la valeur de $\ln$ en 1 : $\ln(1) = 0$.

Étape 3 — conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(1) = 0.$$

Remarque

Comparez avec l'exercice de la section précédente, où l'on calculait la **même** fonction mais en $x \rightarrow 1^+$ (limite $-\infty$, car l'intérieur tendait vers 0^+). C'est le point d'arrivée b qui change tout !

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x+1}{x+3}}$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x+1}{x+3}}$

Étape 1 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+3} = \frac{2}{1} = 2$ (degrés égaux, rapport des coefficients dominants).

Étape 2 — on connaît la valeur de $e^{(\cdot)}$ en 2 : c'est e^2 .

Étape 3 —

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x+1}{x+3}} = e^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{x^2 - 1}}$$

- Premier cas : $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ donc l'intérieur $\rightarrow 1$, et $\ln(1) = 0$.
- Deuxième cas : degrés égaux $\Rightarrow$ l'intérieur $\rightarrow \frac{4}{1} = 4$, et $\sqrt{4} = 2$.

Cas particulier utile

Si $u(x) \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$), on utilise directement la limite **connue** de f à l'infini : par exemple $\ln(x^2 + 1) \rightarrow +\infty$ car $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$ et $\ln(+\infty) = +\infty$.

Attention : où la méthode peut coincer

Mise en garde

La substitution « passe bien » **tant que f a un comportement bien défini au point b .**

- Si b est un point où f n'est **pas définie** (ex. $\ln(0)$), il faut étudier le **signe** de l'intérieur autour de a pour savoir si on l'approche par valeurs > 0 ou < 0 (comme au chapitre précédent), c'est là qu'apparaissent les 0^+ et 0^- .
- Si le calcul de $b = \lim u(x)$ est **lui-même** une forme indéterminée ($\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, ...), il faut d'abord la résoudre *avant* d'appliquer f .

Exemple

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$: ici $x-2 \rightarrow 0^+$ et $x+1 \rightarrow 3$, donc l'intérieur $\rightarrow 0^+$ (pas une valeur finie non nulle) : on tombe dans le cas $\ln(0^+) = -\infty$, pas dans une simple substitution.

Exercices

❶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$

❷ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x+1}{x-2}}$

❸ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-4}}$

❹ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$

❺ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x})$

❻ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x}$

❼ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ (attention : ici l'intérieur ne tend pas vers un nombre fini !)

- ❶ Intérieur $\rightarrow \frac{2}{1} = 2$ (degrés égaux), donc limite $= \ln(2)$.
- ❷ Intérieur $\rightarrow \frac{1}{1} = 1$ (degrés égaux), donc limite $= e^1 = e$.
- ❸ Intérieur $\rightarrow \frac{1}{1} = 1$ (degrés égaux), donc limite $= \sqrt{1} = 1$.
- ❹ Quand $x \rightarrow 2^+$: numérateur $\rightarrow 0^+$, dénominateur $\rightarrow 3$, donc intérieur $\rightarrow 0^+$; d'où limite $= \ln(0^+) = -\infty$.
- ❺ $e^{-x} \rightarrow 0$ donc intérieur $\rightarrow 1$, d'où limite $= \ln(1) = 0$.
- ❻ $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$, donc limite $= e^0 = 1$.
- ❼ Degré du numérateur (2) $>$ degré du dénominateur (1) $\Rightarrow$ intérieur $\rightarrow +\infty$; donc limite $= \ln(+\infty) = +\infty$ (limite connue de $\ln$ à l'infini, pas une simple substitution).

Important: Toujours calculer d'abord la limite de **l'intérieur**, puis regarder où f envoie cette valeur (finie ou infinie) : c'est le réflexe à avoir pour **toute** composée de fonctions usuelles.

Objectif de la section

On veut déterminer rapidement, quand $x \rightarrow +\infty$ (et parfois $x \rightarrow -\infty$), le comportement de fractions du type :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \frac{\ln(x)}{x^p}, \quad \frac{e^x}{x^p}, \quad \frac{e^x}{\ln(x)} \dots$$

Principe

Ces formes sont typiquement des indéterminations $\frac{\infty}{\infty}$. On les résout en comparant **qui grandit le plus vite**.

Fractions de polynômes : règle des degrés

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, avec $n = \deg(P)$, $m = \deg(Q)$.

Règle des degrés

- Si $n < m$, alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.
- Si $n = m$, alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ (rapport des coefficients dominants).
- Si $n > m$, alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$ (le signe dépend de x et des coefficients).

Astuce

Méthode : diviser numérateur et dénominateur par la plus grande puissance de x présente dans le **dénominateur**.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{5x^3 - 2}$$

On divise haut et bas par x^3 (plus grande puissance au dénominateur) :

$$\frac{3x^2 + 1}{5x^3 - 2} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 - \frac{2}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{0 + 0}{5 - 0} = 0.$$

Ceci confirme la règle : degré du numérateur (2) < degré du dénominateur (3).

Exercices

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{5x^3 - 2}$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 + 7}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 + 1}{x^5 - 3}$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^4 - x}{2x^2 + 3x - 1}$$

$$⑥ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4}$$

❶ $2 < 3 \Rightarrow \text{limite} = 0.$

❷ $2 = 2 \Rightarrow \text{limite} = \frac{4}{2} = 2.$

❸ $\frac{x^3}{x} = x^2 \Rightarrow \text{limite} = +\infty.$

❹ $5 = 5 \Rightarrow \text{limite} = \frac{-2}{1} = -2.$

❺ $4 > 2 \Rightarrow \text{limite} = +\infty$ (terme dominant $\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^2 \rightarrow +\infty$).

❻ $2 < 3 \Rightarrow \text{limite} = 0.$

Logarithme vs puissance : le log est plus lent

On compare $\frac{\ln(x)}{x^p}$ ($p > 0$) quand $x \rightarrow +\infty$.

Intuition

- $\ln(x)$ augmente très lentement.
- x^p (avec $p > 0$) augmente beaucoup plus vite.

Résultat à retenir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0 \quad \text{pour tout } p > 0.$$

Exercices

$$① \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

$$② \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

$$③ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}$$

$$④ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$⑤ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)}$$

$$⑥ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(x)}{x}$$

Message clé

À l'infini : $\ln(x) \ll x^p$ (pour tout $p > 0$).

- ❶ 0 (cas de base, $p = 1$).
- ❷ 0 (cas $p = \frac{1}{2}$).
- ❸ 0 (encore plus vite vers 0 que #1).
- ❹ 0 : $(\ln x)^2$ reste dominé par x , même élevé au carré.
- ❺ $+\infty$: c'est l'inverse de $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$.
- ❻ On écrit $\frac{x + \ln x}{x} = 1 + \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1 + 0 = 1$.

Exponentielle vs puissance : l'exponentielle est plus rapide

On compare $\frac{e^x}{x^p}$ ($p > 0$) quand $x \rightarrow +\infty$.

Intuition

x^p grandit, mais l'exponentielle e^x **explose** beaucoup plus vite.

Résultat à retenir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad \text{pour tout } p > 0.$$

Exercices

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{e^x}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{e^x}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^{10}}$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \quad (\text{indice : posez } t = -x)$$

- ❶ $+\infty$.
- ❷ $+\infty$ (même conclusion, un p plus grand ne change rien à la nature du résultat).
- ❸ 0 : c'est l'inverse de #2 (même famille), donc tend vers 0 .
- ❹ 0 : le polynôme est totalement dominé par e^x .
- ❺ $+\infty$.
- ❻ Avec $t = -x \rightarrow +\infty$: $xe^x = -t e^{-t} = -\frac{t}{e^t} \rightarrow -0 = 0$.

Remarque

Le dernier exercice est important : il montre que la substitution $t = -x$ ramène toujours une limite en $-\infty$ à une limite en $+\infty$, là où nos règles s'appliquent directement.

Hiérarchie finale des croissances (à retenir)

Quand $x \rightarrow +\infty$:

$$\boxed{\ln(x) \ll x^p \ll e^x} \quad (p > 0)$$

Traduction pratique

$$\frac{\ln(x)}{x^p} \rightarrow 0, \quad \frac{x^p}{e^x} \rightarrow 0, \quad \text{donc} \quad \frac{\ln(x)}{e^x} \rightarrow 0 \text{ aussi.}$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^3}{e^x + \ln(x)}$

On factorise **le terme le plus fort au numérateur et au dénominateur** (ici e^x dans les deux cas) :

$$\frac{e^x + x^3}{e^x + \ln x} = \frac{e^x \left(1 + \frac{x^3}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{\ln x}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{x^3}{e^x}}{1 + \frac{\ln x}{e^x}}.$$

Comme $\frac{x^3}{e^x} \rightarrow 0$ et $\frac{\ln x}{e^x} \rightarrow 0$ (hiérarchie ci-dessus),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^3}{e^x + \ln x} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

Et si on mélange les trois familles à la fois ?

En pratique, une expression contient souvent **plusieurs familles en même temps** : des puissances de x , des logarithmes, et des exponentielles, parfois multipliées entre elles ($x^5 \ln(x)$, $x^2 e^x$, ...) ou avec des taux différents (e^x contre e^{2x}).

La hiérarchie s'étend naturellement

Quand $x \rightarrow +\infty$:

- $(\ln x)^q \ll x^p$ pour tous $p, q > 0$ (même $(\ln x)^{100} \ll \sqrt{x}$) ;
- si $a > b > 0$, alors $e^{bx} \ll e^{ax}$ (l'exponentielle au taux le plus grand gagne) ;
- un **produit** d'une puissance et d'un $\ln$, comme $x^5 \ln(x)$, reste dans la « famille polynôme » : il est encore $\ll e^{ax}$ pour tout $a > 0$.

Remarque

Peu importe comment on combine des puissances et des logarithmes par produit, l'exponentielle finit toujours par les écraser tous.

Méthode : factoriser par le terme dominant

En 3 étapes

- ❶ **Repérer** le terme qui domine tous les autres (à l'aide de la hiérarchie étendue).
- ❷ **Factoriser** ce terme dans toute l'expression.
- ❸ Chaque terme restant, une fois divisé par le terme dominant, tend vers 0 : conclure à partir de ce qui reste.

Repère rapide

Dans une somme ou une différence, le terme dominant est presque toujours celui qui contient l'exponentielle avec le plus grand taux; s'il n'y a pas d'exponentielle, c'est la puissance de x la plus élevée.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 \ln(x) - e^{2x})$

Le terme e^{2x} domine (une exponentielle bat toujours un produit puissance-log). On factorise par e^{2x} :

$$x^5 \ln(x) - e^{2x} = e^{2x} \left(\frac{x^5 \ln(x)}{e^{2x}} - 1 \right).$$

Or $\frac{x^5 \ln(x)}{e^{2x}} \rightarrow 0$, donc la parenthèse $\rightarrow (0 - 1) = -1$. Comme $e^{2x} \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 \ln(x) - e^{2x}) = -\infty.$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x^{100}e^x)$

Ici e^{2x} domine $x^{100}e^x$, car $\frac{x^{100}e^x}{e^{2x}} = \frac{x^{100}}{e^x} \rightarrow 0$. On factorise par e^{2x} :

$$e^{2x} - x^{100}e^x = e^{2x} \left(1 - \frac{x^{100}e^x}{e^{2x}} \right) = e^{2x} \left(1 - \frac{x^{100}}{e^x} \right).$$

Or $\frac{x^{100}}{e^x} \rightarrow 0$, donc la parenthèse $\rightarrow 1$. Comme $e^{2x} \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x^{100}e^x) = +\infty.$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^x + \ln(x)}{e^{2x} + x^2}$

Le terme qui domine **globalement** (numérateur et dénominateur confondus) est e^{2x} . On divise tout par e^{2x} :

$$\frac{x^3 e^x + \ln x}{e^{2x} + x^2} = \frac{\frac{x^3 e^x}{e^{2x}} + \frac{\ln x}{e^{2x}}}{1 + \frac{x^2}{e^{2x}}} = \frac{\frac{x^3}{e^x} + \frac{\ln x}{e^{2x}}}{1 + \frac{x^2}{e^{2x}}}.$$

Chaque terme du numérateur $\rightarrow 0$; au dénominateur, $\frac{x^2}{e^{2x}} \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^x + \ln x}{e^{2x} + x^2} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

Attention : cette hiérarchie ne vaut qu'en $+\infty$

Mise en garde

La hiérarchie $\ln(x) \ll x^p \ll e^x$ (et ses extensions) n'est valable que quand $x \rightarrow +\infty$.

- $\ln(x)$ n'est même **pas défini** pour $x \rightarrow -\infty$.
- Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$: l'exponentielle devient **négligeable** plutôt que dominante! Le comportement est alors dicté par le terme polynomial de plus haut degré, comme au tout début de ce chapitre.

Exemple

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + e^x)$: ici $e^x \rightarrow 0$, donc c'est x^3 qui domine et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + e^x) = -\infty$.

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{10} \ln(x) - e^x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - x^{50} e^{2x})$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x + \ln(x)}{e^{2x} + x^3}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} e^{-x} + \frac{(\ln x)^2}{x} \right)$$

- ① e^x domine $x^{10} \ln x$. Factoriser par e^x : $x^{10} \ln x - e^x = e^x \left(\frac{x^{10} \ln x}{e^x} - 1 \right) \rightarrow e^x \cdot (-1) = -\infty$.
- ② e^{3x} domine $x^{50} e^{2x}$ (rapport $= x^{50} e^{-x} \rightarrow 0$). Factoriser par e^{3x} :
 $e^{3x} - x^{50} e^{2x} = e^{3x} (1 - x^{50} e^{-x}) \rightarrow e^{3x} \cdot 1 = +\infty$.
- ③ e^{2x} domine tout. En divisant par e^{2x} : numérateur $\rightarrow 0 + 0 = 0$, dénominateur $\rightarrow 1 + 0 = 1$, donc la limite vaut 0.
- ④ Somme de deux termes qui tendent chacun vers 0 directement (croissances comparées) : $0 + 0 = 0$.

Exercices de synthèse (1/2)

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^5}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^6}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 7}{x^3 + 10x}$$

Exercices de synthèse (2/2)

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + 1}{2x^6 - 3}$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{e^x}$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^{100}}$$

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^x}{x^3 + e^x}$$

$$10 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + \ln x)$$

- ❶ 0 ($\ln \ll x^2$).
- ❷ 0 ($(\ln x)^3 \ll x^5$, même avec la puissance 3).
- ❸ 0 ($x^5 \ll e^x$).
- ❹ $+\infty$ ($e^x \gg x^6$).
- ❺ Degrés égaux (3) $\Rightarrow$ rapport des coefficients $= \frac{2}{1} = 2$.
- ❻ Degré num. (4) $<$ degré dénom. (6) $\Rightarrow 0$.
- ❼ 0 (e^x écrase tout polynôme).
- ❽ $+\infty$ (e^{3x} écrase toute puissance de x , même x^{100}).
- ❾ On factorise e^x en haut et en bas :

$$\frac{x^2 + e^x}{x^3 + e^x} = \frac{1 + \frac{x^2}{e^x}}{1 + \frac{x^3}{e^x}} \rightarrow \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

- ❿ $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ et $\ln x \rightarrow +\infty$, donc la somme tend vers $0 + \infty = +\infty$.