Chapitre 6 - La dérivée Partie 2

Fonctions élémentaires, fonctions composées et règle de la chaîne

Mohamed Nouidha

Collège Sainte-Anne

Automne 2026

Plan

1. Rappel : fonctions trigonométriques
2. Dérivées des fonctions trigonométriques
3. Fonctions composées
4. Règle de la chaîne
5. Familles de fonctions composées
6. Compositions multiples
7. Combiner les règles
8. Applications
9. Exercices
10. Récapitulatif
11. Réponses aux exercices

Objectifs de la partie 2

À la fin de cette partie, vous devriez être capable de :

1. utiliser le cercle trigonométrique, les radians et les identités de base ;
2. dériver e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ et les combiner avec les règles de la partie 1 ;
3. reconnaître une **fonction composée** et identifier ses fonctions intérieure et extérieure ;
4. appliquer la **règle de la chaîne**, y compris pour plusieurs couches ;
5. combiner chaîne, produit et quotient dans un même calcul ;
6. utiliser ces dérivées pour des tangentes, des approximations et des taux de variation.

Rappel de la partie 1

Règles de dérivation

$$(c)' = 0 \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(c\,f)' = c\,f' \qquad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f\,g)' = f'g + f\,g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$$

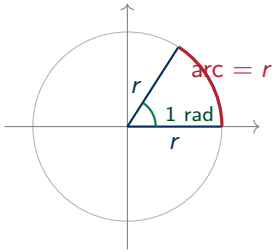
Dans cette partie, on ajoute de nouvelles fonctions (e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$) et une nouvelle règle : la **règle de la chaîne**, pour dériver une fonction composée.

Le radian

Définition – Radian

Un angle de **1 radian** intercepte, sur un cercle de rayon r, un arc de longueur r. Sur le cercle de rayon 1, **la mesure en radians = la longueur de l'arc**.

Un tour : 2π rad $= 360°$, donc π rad $= 180°$ et $\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \cdot \dfrac{\pi}{180}$.

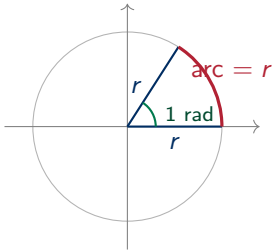


1 rad $\approx 57{,}3°$

Le radian

Définition – Radian

Un angle de **1 radian** intercepte, sur un cercle de rayon r, un arc de longueur r. Sur le cercle de rayon 1, **la mesure en radians = la longueur de l'arc**.



Un tour : 2π rad $= 360°$, donc π rad $= 180°$ et $\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \cdot \dfrac{\pi}{180}$.

1 rad $\approx 57{,}3°$

degrés	0	30	45	60	90	180	270	360
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Attention

En calcul différentiel, les angles sont **toujours** en radians (calculatrice en mode RAD !).

Le cercle trigonométrique

P : point du cercle de rayon 1 associé à l'angle θ (sens antihoraire, à partir de l'axe des x).

Définitions

$$P = (\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\cos\theta \neq 0)$$

Le cercle trigonométrique

P : point du cercle de rayon 1 associé à l'angle θ (sens antihoraire, à partir de l'axe des x).

Définitions

$$P = (\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\cos\theta \neq 0)$$

- $\cos\theta$: abscisse de P ; $\sin\theta$: ordonnée.
- $\tan\theta$: pente de OP, lue sur la droite $x = 1$.
- $-1 \leq \cos\theta \leq 1,\ \ -1 \leq \sin\theta \leq 1$.

Le cercle trigonométrique

P : point du cercle de rayon 1 associé à l'angle θ (sens antihoraire, à partir de l'axe des x).

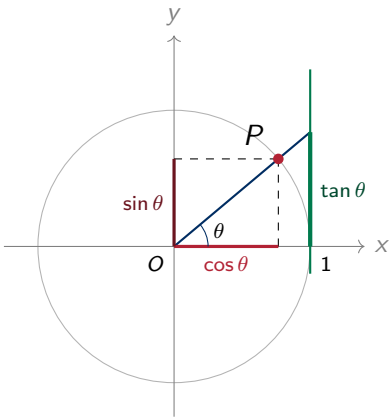
Définitions

$$P = (\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\cos\theta \neq 0)$$

- $\cos\theta$: abscisse de P ; $\sin\theta$: ordonnée.
- $\tan\theta$: pente de OP, lue sur la droite $x = 1$.
- $-1 \leq \cos\theta \leq 1, \quad -1 \leq \sin\theta \leq 1$.

Autres : $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.



Valeurs remarquables et signes

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.

Valeurs remarquables et signes

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.

Astuce mnémotechnique

$\sin\theta = \frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$; cos : même liste, dans l'ordre inverse.

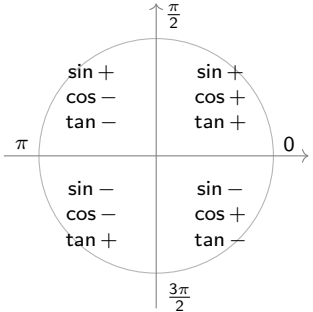
Valeurs remarquables et signes

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.

Astuce mnémotechnique

$\sin\theta = \frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$; cos : même liste, dans l'ordre inverse.

Signes selon le quadrant



Ex. : $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (2^{e} quadrant, angle de référence $\frac{\pi}{3}$).

Identités utiles

Identité de Pythagore

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et, en divisant par $\cos^2 x$: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

Parité et périodicité

$\cos(-x) = \cos x$ (paire) $\sin(-x) = -\sin x$ (impaire)

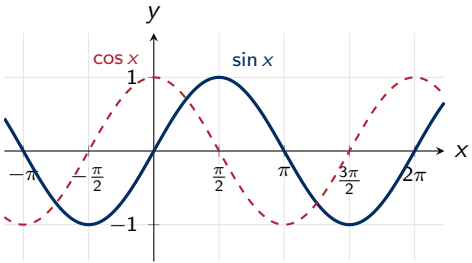
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\tan(x + \pi) = \tan x$

Angle double et déphasage

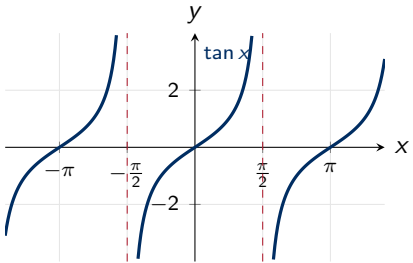
$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

Graphes de sin, cos et tan



Domaine $\mathbb{R}$, image $[-1, 1]$, période 2π. Le graphe de cos est celui de sin décalé de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche.



Non définie si $\cos x = 0$ ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$) : asymptotes verticales. Période π, image $\mathbb{R}$.

Résoudre une équation trigonométrique simple

Utile pour trouver les **tangentes horizontales** ($f'(x) = 0$).

Exemple – $\sin x = \frac{1}{2}$ **sur** $[0, 2\pi]$

Angle de référence $\frac{\pi}{6}$; sinus positif dans les quadrants I et II :

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Résoudre une équation trigonométrique simple

Utile pour trouver les **tangentes horizontales** ($f'(x) = 0$).

Exemple – $\sin x = \frac{1}{2}$ **sur** $[0, 2\pi]$

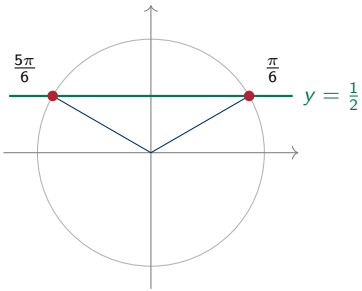
Angle de référence $\frac{\pi}{6}$; sinus positif dans les quadrants I et II :

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Cas à connaître ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi \qquad \tan x = 0 \iff x = k\pi$$
$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Sur $\mathbb{R}$: ajouter $2k\pi$ aux solutions de $[0, 2\pi[$.



Deux points du cercle ont une ordonnée égale à $\frac{1}{2}$.

Exercices R – rappel de trigonométrie

1. Convertir 150° en radians, puis $\dfrac{7\pi}{4}$ en degrés.
2. Donner la valeur exacte : $\sin\dfrac{2\pi}{3}$, $\cos\dfrac{5\pi}{4}$, $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\cos\dfrac{3\pi}{2}$.
3. Résoudre sur $[0, 2\pi]$: (a) $2\sin x = 1$ (b) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ (c) $\tan x = -1$.
4. Simplifier : (a) $\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x}$ (b) $\sin x \sec x$ (c) $\cos^2 x\,(1+\tan^2 x)$.
5. Si $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ et $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, trouver $\cos\theta$ et $\tan\theta$.

La fonction exponentielle e^x

Pour $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, la pente de la tangente en $x = 0$ dépend de la base a.

Pente approximative en 0 (taux de variation sur $[0\,;\,0{,}0001]$) :

a	2	$e \approx 2{,}718$	3
pente en 0	0,693	1,000	1,099

La fonction exponentielle e^x

Pour $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, la pente de la tangente en $x = 0$ dépend de la base a.

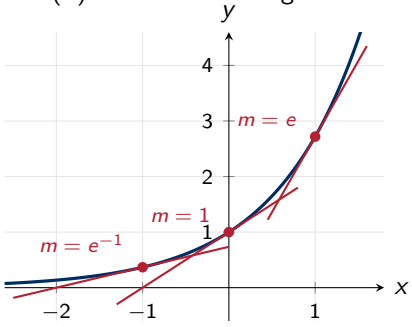
Pente approximative en 0 (taux de variation sur $[0\,;\,0{,}0001]$) :

a	2	$e \approx 2{,}718$	3
pente en 0	0,693	1,000	1,099

Le nombre e – propriété admise

$e \approx 2{,}718$ est la base dont la pente en 0 vaut 1, et $\left(e^x\right)' = e^x$ (pente = hauteur).

$f(x) = e^x$ et trois tangentes



La fonction logarithme naturel $\ln x$

$\ln x$ est la réciproque de e^x :
$y = \ln x \iff e^y = x$ (définie pour $x > 0$).

Propriété (admise)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

La fonction logarithme naturel $\ln x$

$\ln x$ est la réciproque de e^x :
$y = \ln x \iff e^y = x$ (définie pour $x > 0$).

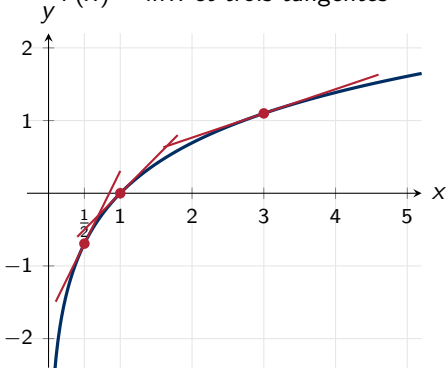
Propriété (admise)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

Conséquences sur le graphe :

- $f'(\frac{1}{2}) = 2$, $f'(1) = 1$, $f'(3) = \frac{1}{3}$: ce sont les pentes des trois tangentes ;
- $\frac{1}{x} > 0$: ln est toujours croissante ;
- $\frac{1}{x} \to 0$ quand $x \to \infty$: la croissance ralentit sans jamais s'arrêter.

$f(x) = \ln x$ et trois tangentes



Sinus et cosinus

Propriété (admise)

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

Sinus et cosinus

Propriété (admise)

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

Vérification sur le graphe ($\sin x$ en bleu) : les tangentes en 0, $\frac{\pi}{2}$ et π ont pour pentes 1, 0 et -1, c'est-à-dire $\cos 0$, $\cos \frac{\pi}{2}$ et $\cos \pi$ (courbe rouge).

Sinus et cosinus

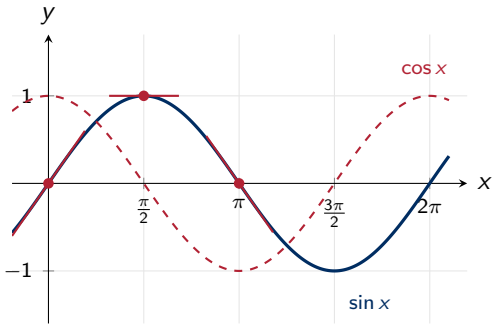
Propriété (admise)

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

Vérification sur le graphe ($\sin x$ en bleu) : les tangentes en 0, $\frac{\pi}{2}$ et π ont pour pentes 1, 0 et -1, c'est-à-dire $\cos 0$, $\cos \frac{\pi}{2}$ et $\cos \pi$ (courbe rouge).

Attention

Ces formules ne sont valables que si x est en **radians**.



Tangente : une application de la règle du quotient

Comme $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, la règle du quotient donne :

Tangente : une application de la règle du quotient

Comme $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, la règle du quotient donne :

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Tangente : une application de la règle du quotient

Comme $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, la règle du quotient donne :

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Propriété

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \qquad (\text{là où } \cos x \neq 0)$$

Tangente : une application de la règle du quotient

Comme $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, la règle du quotient donne :

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Propriété

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \qquad \text{(là où } \cos x \neq 0\text{)}$$

À vous !

Avec la règle du quotient appliquée à $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, calculer $(\sec x)'$ et l'écrire en fonction de $\sec x$ et $\tan x$.

Tableau des dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	e^x	e^x
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
		$\tan x$	$\sec^2 x$

À connaître par cœur : toutes les autres dérivées s'obtiennent avec les règles (produit, quotient, chaîne).

Exemples : fonctions élémentaires et règles de la partie 1

Exemple 1 – produit

$f(x) = x^2 e^x$: $\quad f'(x) = 2x\, e^x + x^2 e^x = x\, e^x(2 + x).$

Exemples : fonctions élémentaires et règles de la partie 1

Exemple 1 – produit

$f(x) = x^2 e^x$: $\quad f'(x) = 2x\, e^x + x^2 e^x = x\, e^x(2 + x)$.

Exemple 2 – quotient

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$: $\quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Exemples : fonctions élémentaires et règles de la partie 1

Exemple 1 – produit

$f(x) = x^2 e^x : \quad f'(x) = 2x\, e^x + x^2 e^x = x\, e^x(2 + x).$

Exemple 2 – quotient

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x} : \quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}.$

Exemple 3 – somme et multiples

$f(x) = 4\cos x - 3e^x + \ln x : \quad f'(x) = -4\sin x - 3e^x + \dfrac{1}{x}.$

Exemples : fonctions élémentaires et règles de la partie 1

Exemple 1 – produit

$f(x) = x^2 e^x$: $\quad f'(x) = 2x\, e^x + x^2 e^x = x\, e^x(2 + x)$.

Exemple 2 – quotient

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$: $\quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Exemple 3 – somme et multiples

$f(x) = 4\cos x - 3e^x + \ln x$: $\quad f'(x) = -4\sin x - 3e^x + \dfrac{1}{x}$.

Attention

$(e^x)' \neq x\, e^{x-1}$: la règle de la puissance ne s'applique que si la variable est dans la **base**, pas dans l'exposant.

Analyser une solution

Quatre réponses d'étudiants. **Refaites chaque calcul** en détaillant les étapes, puis comparez : si la réponse est fausse, nommez la règle mal appliquée et écrivez la dérivée correcte.

(a) $(x^3 \ln x)' = 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 3x$

(b) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x}$

(c) $(2 \sin x - e^x)' = 2 \cos x - e^x$

(d) $(5 \cos x)' = 5 \sin x$

Analyser une solution

Quatre réponses d'étudiants. **Refaites chaque calcul** en détaillant les étapes, puis comparez : si la réponse est fausse, nommez la règle mal appliquée et écrivez la dérivée correcte.

(a) $(x^3 \ln x)' = 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 3x$ — Produit des dérivées : $3x^2 \ln x + x^2$

(b) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x}$ — Dénominateur : x^2, pas x

(c) $(2 \sin x - e^x)' = 2 \cos x - e^x$ — **Correct**

(d) $(5 \cos x)' = 5 \sin x$ — Signe : $-5 \sin x$

Exercices A – fonctions élémentaires

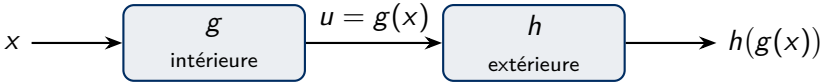
Dériver (règles de la partie 1 et tableau) :

1. $f(x) = 3e^x - 2\ln x + 5\sin x$
2. $f(x) = x\,e^x$
3. $f(x) = x^2 \ln x$
4. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
5. $f(x) = \sin x \cos x$
6. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

Qu'est-ce qu'une fonction composée ?

Une fonction est **composée** lorsqu'on applique une fonction au **résultat** d'une autre :

$$f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x).$$

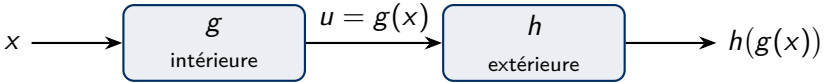


- g : fonction **intérieure** (appliquée en premier) ;
- h : fonction **extérieure** (appliquée en dernier).

Qu'est-ce qu'une fonction composée ?

Une fonction est **composée** lorsqu'on applique une fonction au **résultat** d'une autre :

$$f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x).$$



- g : fonction **intérieure** (appliquée en premier) ;
- h : fonction **extérieure** (appliquée en dernier).

Exemple

$f(x) = \sqrt{3x+1}$: pour calculer $f(2)$, on fait d'abord $3 \cdot 2 + 1 = 7$, puis $\sqrt{7}$. Intérieure : $u = 3x + 1$; extérieure : $\sqrt{u}$.

L'ordre compte !

Soit $g(x) = 3x + 1$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{3x+1} \qquad \neq \qquad (g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3\sqrt{x} + 1.$$

L'ordre compte !

Soit $g(x) = 3x + 1$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{3x+1} \qquad \neq \qquad (g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3\sqrt{x} + 1.$$

Méthode pour repérer la fonction extérieure

Imaginer qu'on calcule $f(x)$ pour une valeur précise de x :

- la **dernière** opération effectuée est la fonction **extérieure** ;
- tout ce sur quoi elle agit (dans la parenthèse, sous la racine, dans l'exposant) est l'**intérieur**.

Exemples : identifier intérieure et extérieure

Fonction	**Intérieure** u	**Extérieure**
$(2x-5)^4$		
$\sqrt{1+x^2}$		
e^{3x}		
$\ln(5x-1)$		
$\sin(2x)$		
$\dfrac{1}{(x^3+1)^2}$		

Exemples : identifier intérieure et extérieure

Fonction	**Intérieure** u	**Extérieure**
$(2x-5)^4$	$2x-5$	u^4
$\sqrt{1+x^2}$		
e^{3x}		
$\ln(5x-1)$		
$\sin(2x)$		
$\frac{1}{(x^3+1)^2}$		

Exemples : identifier intérieure et extérieure

Fonction	**Intérieure** u	**Extérieure**
$(2x-5)^4$	$2x-5$	u^4
$\sqrt{1+x^2}$	$1+x^2$	$\sqrt{u}$
e^{3x}		
$\ln(5x-1)$		
$\sin(2x)$		
$\frac{1}{(x^3+1)^2}$		

Exemples : identifier intérieure et extérieure

Fonction	**Intérieure** u	**Extérieure**
$(2x-5)^4$	$2x-5$	u^4
$\sqrt{1+x^2}$	$1+x^2$	$\sqrt{u}$
e^{3x}	$3x$	e^u
$\ln(5x-1)$		
$\sin(2x)$		
$\dfrac{1}{(x^3+1)^2}$		

Exemples : identifier intérieure et extérieure

Fonction	**Intérieure u**	**Extérieure**
$(2x-5)^4$	$2x-5$	u^4
$\sqrt{1+x^2}$	$1+x^2$	$\sqrt{u}$
e^{3x}	$3x$	e^u
$\ln(5x-1)$	$5x-1$	$\ln u$
$\sin(2x)$		
$\frac{1}{(x^3+1)^2}$		

Exemples : identifier intérieure et extérieure

Fonction	**Intérieure** u	**Extérieure**
$(2x-5)^4$	$2x-5$	u^4
$\sqrt{1+x^2}$	$1+x^2$	$\sqrt{u}$
e^{3x}	$3x$	e^u
$\ln(5x-1)$	$5x-1$	$\ln u$
$\sin(2x)$	$2x$	$\sin u$
$\dfrac{1}{(x^3+1)^2}$		

Exemples : identifier intérieure et extérieure

Fonction	**Intérieure u**	**Extérieure**
$(2x-5)^4$	$2x-5$	u^4
$\sqrt{1+x^2}$	$1+x^2$	$\sqrt{u}$
e^{3x}	$3x$	e^u
$\ln(5x-1)$	$5x-1$	$\ln u$
$\sin(2x)$	$2x$	$\sin u$
$\dfrac{1}{(x^3+1)^2}$	x^3+1	u^{-2}

Pièges de lecture

Écriture	Signifie	Extérieure
$\sin^2 x$	$(\sin x)^2$	le carré u^2 (avec $u = \sin x$)
$\sin(x^2)$	sin de x^2	le sinus (avec $u = x^2$)
$\ln^2 x$	$(\ln x)^2$	le carré
$\ln(x^2)$	ln de x^2	le logarithme $(= 2\ln x$ si $x > 0)$
$e^x + 1$	somme	**pas** une composée : règle de la somme
e^{x+1}	e exposant $(x + 1)$	l'exponentielle (avec $u = x + 1$)

Attention

$\sin^2 x \neq \sin(x^2)$ et $\ln^2 x \neq \ln(x^2)$. Écrire les parenthèses en cas de doute !

À vous – identifier la fonction extérieure

À vous !

Dans $f(x) = \sin^2(3x)$, quelle est la fonction **extérieure** ? Quelle est la fonction intérieure ? Justifiez.

À vous – identifier la fonction extérieure

À vous !

Dans $f(x) = \sin^2(3x)$, quelle est la fonction **extérieure** ? Quelle est la fonction intérieure ? Justifiez.

Réponse

Pour calculer $f(1)$: on fait $3 \cdot 1$, puis $\sin 3$, puis on **met au carré**. La dernière opération est le carré : $f = u^2$ avec $u = \sin(3x)$, elle-même composée.

Exercices B – identifier la composition

Pour chaque fonction, identifier la fonction intérieure u et la fonction extérieure :

1. $(x^2+1)^5$
2. $\sqrt{4-3x}$
3. $\dfrac{1}{(2x+1)^3}$
4. $\cos(5x^2)$
5. $\ln(\sqrt{x})$
6. $\cos^3 x$
7. $e^{\sin x}$
8. $\tan(1-x)$

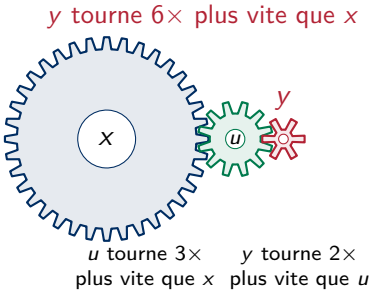
Bonus : soit $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^2-4$. Calculer $(f\circ g)(x)$ et $(g\circ f)(x)$. Sont-elles égales ?

Intuition : des taux qui se multiplient

Trois engrenages : quand x fait 1 tour, u fait 3 tours ; quand u fait 1 tour, y fait 2 tours.

Quand x fait 1 tour, y fait donc $3 \times 2 = 6$ tours :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot 3 = 6.$$



(un petit engrenage tourne plus vite : rayons 6 : 2 : 1)

Un exemple concret : le ballon

Un ballon sphérique gonfle : son volume V dépend du rayon r, qui dépend du temps t. Le rayon augmente de 0,5 cm/s. À quel rythme le volume augmente-t-il quand $r = 10$ cm ?

Un exemple concret : le ballon

Un ballon sphérique gonfle : son volume V dépend du rayon r, qui dépend du temps t. Le rayon augmente de 0,5 cm/s. À quel rythme le volume augmente-t-il quand $r = 10$ cm ?

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0{,}5 \text{ cm/s}.$$

Un exemple concret : le ballon

Un ballon sphérique gonfle : son volume V dépend du rayon r, qui dépend du temps t. Le rayon augmente de 0,5 cm/s. À quel rythme le volume augmente-t-il quand $r = 10$ cm ?

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0{,}5 \text{ cm/s}.$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi(10)^2 \cdot 0{,}5 = 200\pi \approx 628 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Un exemple concret : le ballon

Un ballon sphérique gonfle : son volume V dépend du rayon r, qui dépend du temps t. Le rayon augmente de 0,5 cm/s. À quel rythme le volume augmente-t-il quand $r = 10$ cm ?

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0{,}5 \text{ cm/s}.$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi(10)^2 \cdot 0{,}5 = 200\pi \approx 628 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

À retenir

Les taux se **multiplient** : c'est exactement ce que dit la règle de la chaîne, énoncée à la diapo suivante.

Énoncé de la règle de la chaîne

Règle de la chaîne

Si g est dérivable en x et h dérivable en $g(x)$, alors

$$\Big(h(g(x))\Big)' = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

En notation de Leibniz, avec $y = h(u)$ et $u = g(x)$: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$

Énoncé de la règle de la chaîne

Règle de la chaîne

Si g est dérivable en x et h dérivable en $g(x)$, alors

$$\Big(h(g(x))\Big)' = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

En notation de Leibniz, avec $y = h(u)$ et $u = g(x)$: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

En mots

« On dérive la fonction **extérieure** en **gardant l'intérieur intact**, puis on multiplie par la **dérivée de l'intérieur**. »

Vérification sur un cas simple

$f(x) = (2x+1)^2$: on peut calculer f' de deux façons.

En développant

$f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

$$f'(x) = 8x + 4$$

Avec la chaîne

$u = 2x + 1, \quad u' = 2$

$$f'(x) = 2(2x+1) \cdot 2 = 8x + 4 \ \checkmark$$

Vérification sur un cas simple

$f(x) = (2x+1)^2$: on peut calculer f' de deux façons.

En développant

$f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

$$f'(x) = 8x + 4$$

Avec la chaîne

$u = 2x+1, \quad u' = 2$

$$f'(x) = 2(2x+1) \cdot 2 = 8x + 4 \ \checkmark$$

Erreurs fréquentes

- **Oublier** u' : $\big((2x+1)^2\big)' = 2(2x+1)$ faux (il manque le facteur 2).
- **Dériver l'intérieur dans la fonction extérieure** : $\big(\sin(x^2)\big)' = \cos(2x)$ faux ; correct : $\cos(x^2) \cdot 2x$.
- Confondre avec le produit : $\big(\sin(x^2)\big)' \neq \cos x \cdot 2x$.

Méthode en 3 étapes

Dériver $f(x) = (x^2 + 1)^5$.

Méthode en 3 étapes

Dériver $f(x) = (x^2 + 1)^5$.

1. **Décomposer :** intérieure $u = x^2 + 1$; extérieure u^5.

Méthode en 3 étapes

Dériver $f(x) = (x^2 + 1)^5$.

1. **Décomposer :** intérieure $u = x^2 + 1$; extérieure u^5.
2. **Dériver chaque couche :** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^5) = 5u^4 \qquad u' = 2x.$

Méthode en 3 étapes

Dériver $f(x) = (x^2 + 1)^5$.

1. **Décomposer :** intérieure $u = x^2 + 1$; extérieure u^5.
2. **Dériver chaque couche :** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^5) = 5u^4 \qquad u' = 2x.$
3. **Assembler** (remettre u en fonction de x) :

$$f'(x) = 5u^4 \cdot u' = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x = 10x\,(x^2 + 1)^4.$$

Méthode en 3 étapes

Dériver $f(x) = (x^2+1)^5$.

1. **Décomposer :** intérieure $u = x^2+1$; extérieure u^5.
2. **Dériver chaque couche :** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^5) = 5u^4 \qquad u' = 2x.$
3. **Assembler** (remettre u en fonction de x) :

$$f'(x) = 5u^4 \cdot u' = 5(x^2+1)^4 \cdot 2x = 10x\,(x^2+1)^4.$$

Pourquoi ne pas développer ?

Développer $(x^2+1)^5$ puis dériver est possible mais long (6 termes) et source d'erreurs. La règle de la chaîne donne en plus une réponse **factorisée**, utile pour étudier le signe de f'.

Du guidé à l'autonome

1. Exemple résolu

$f(x) = (5x-2)^3$

$u = 5x-2$; ext. : u^3

$(u^3)' = 3u^2$; $u' = 5$

$f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5$

$= 15(5x-2)^2$

2. À compléter

$f(x) = \sqrt{x^3+1}$

u = _____ ; ext. : _____

$(\sqrt{u})'$ = _____ ; u' = _____

$f'(x)$ = _____

3. Seul

$f(x) = \dfrac{1}{(1-4x)^2}$

Du guidé à l'autonome

1. Exemple résolu

$f(x) = (5x-2)^3$

$u = 5x-2$; ext. : u^3

$(u^3)' = 3u^2$; $u' = 5$

$f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5$

$= 15(5x-2)^2$

2. À compléter

$f(x) = \sqrt{x^3+1}$

$u = x^3+1$; ext. : $\sqrt{u}$

$(\sqrt{u})' =$ _____ ; $u' =$ _____

$f'(x) =$ _____

3. Seul

$f(x) = \dfrac{1}{(1-4x)^2}$

Du guidé à l'autonome

1. Exemple résolu

$f(x) = (5x-2)^3$

$u = 5x-2$; ext. : u^3

$(u^3)' = 3u^2$; $u' = 5$

$f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5$

$= 15(5x-2)^2$

2. À compléter

$f(x) = \sqrt{x^3+1}$

$u = x^3+1$; ext. : $\sqrt{u}$

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$; $u' = 3x^2$

$f'(x) =$ _____

3. Seul

$f(x) = \dfrac{1}{(1-4x)^2}$

Du guidé à l'autonome

1. Exemple résolu

$f(x) = (5x-2)^3$

$u = 5x-2$; ext. : u^3

$(u^3)' = 3u^2$; $u' = 5$

$f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5$

$= 15(5x-2)^2$

2. À compléter

$f(x) = \sqrt{x^3+1}$

$u = x^3+1$; ext. : $\sqrt{u}$

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$; $u' = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

3. Seul

$$f(x) = \frac{1}{(1-4x)^2}$$

Du guidé à l'autonome

1. Exemple résolu

$f(x) = (5x-2)^3$

$u = 5x-2$; ext. : u^3

$(u^3)' = 3u^2$; $u' = 5$

$f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5$

$= 15(5x-2)^2$

2. À compléter

$f(x) = \sqrt{x^3+1}$

$u = x^3+1$; ext. : $\sqrt{u}$

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$; $u' = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

3. Seul

$$f(x) = \frac{1}{(1-4x)^2}$$

Réécrire : $(1-4x)^{-2}$

$f' = -2(1-4x)^{-3}(-4)$

$$= \frac{8}{(1-4x)^3}$$

À vous – appliquer la chaîne

À vous !

Dériver $f(x) = e^{x^2}$ en identifiant d'abord les fonctions intérieure et extérieure.

À vous – appliquer la chaîne

À vous !

Dériver $f(x) = e^{x^2}$ en identifiant d'abord les fonctions intérieure et extérieure.

Réponse

$u = x^2$, extérieure e^u : $\quad f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x\, e^{x^2}$.

1. Puissance d'une fonction

Propriété

$$\left(u^n\right)' = n\,u^{n-1}\cdot u' \qquad \text{(pour tout réel } n\text{)}$$

Exemple 1

$$f(x) = (3x-1)^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5(3x-1)^4 \cdot 3 = 15(3x-1)^4.$$

1. Puissance d'une fonction

Propriété

$$\left(u^n\right)' = n\,u^{n-1}\cdot u' \qquad \text{(pour tout réel } n\text{)}$$

Exemple 1

$$f(x) = (3x-1)^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5(3x-1)^4 \cdot 3 = 15(3x-1)^4.$$

Exemple 2 – exposant négatif

$$f(x) = \frac{4}{(2x+1)^3} = 4(2x+1)^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4\cdot(-3)(2x+1)^{-4}\cdot 2 = -\frac{24}{(2x+1)^4}.$$

1. Puissance d'une fonction

Propriété

$$(u^n)' = n\,u^{n-1}\cdot u' \qquad \text{(pour tout réel } n\text{)}$$

Exemple 1

$$f(x) = (3x-1)^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5(3x-1)^4\cdot 3 = 15(3x-1)^4.$$

Exemple 2 – exposant négatif

$$f(x) = \frac{4}{(2x+1)^3} = 4(2x+1)^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4\cdot(-3)(2x+1)^{-4}\cdot 2 = -\frac{24}{(2x+1)^4}.$$

Exemple 3 – puissance d'une fonction trigonométrique

$$f(x) = \sin^3 x = (\sin x)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3\sin^2 x\cdot\cos x.$$

Propriété

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$ (cas $n = \frac{1}{2}$ de la règle précédente)

Exemple 1

$$f(x) = \sqrt{1+4x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{1+4x}} = \frac{2}{\sqrt{1+4x}}$$ (pour $x > -\frac{1}{4}$).

2. Racine d'une fonction

Propriété

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \qquad \text{(cas } n = \tfrac{1}{2} \text{ de la règle précédente)}$$

Exemple 1

$$f(x) = \sqrt{1+4x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{1+4x}} = \frac{2}{\sqrt{1+4x}} \qquad (\text{pour } x > -\tfrac{1}{4}).$$

Exemple 2 – racine cubique

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+5} = (x^2+5)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{3}(x^2+5)^{-2/3} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+5)^2}}.$$

3. Exponentielle composée

Propriété

$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$ (on recopie l'exponentielle, puis on multiplie par la dérivée de l'exposant)

Exemples

$f(x) = e^{2x^2} \Rightarrow f'(x) = 4x\, e^{2x^2}$ $\qquad$ $f(x) = e^{-x/3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-x/3}$

3. Exponentielle composée

Propriété

$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$ (on recopie l'exponentielle, puis on multiplie par la dérivée de l'exposant)

Exemples

$f(x) = e^{2x^2} \Rightarrow f'(x) = 4x\, e^{2x^2}$ $\qquad$ $f(x) = e^{-x/3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-x/3}$

Autre base $a > 0$

Comme $a^x = e^{x \ln a}$: $\left(a^x\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$ et $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$.

Exemple

$f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2$ $\qquad$ $f(x) = 10^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3 \ln 10 \cdot 10^{3x}$

4. Logarithme composé

Propriété

$$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{u'}{u} \qquad (u > 0)$$

Exemples

$f(x) = \ln(5x-1),\ x > \frac{1}{5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{5}{5x-1}$ $\qquad$ $f(x) = \ln(x^2+4) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$

4. Logarithme composé

Propriété

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{u'}{u} \qquad (u > 0)$$

Exemples

$f(x) = \ln(5x-1),\ x > \frac{1}{5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{5}{5x-1}$ $\qquad$ $f(x) = \ln(x^2+4) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$

Astuce – simplifier avec les propriétés du ln avant de dériver

Pour $x > -\frac{1}{2}$: $f(x) = \ln\sqrt{2x+1} = \frac{1}{2}\ln(2x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{2x+1} = \dfrac{1}{2x+1}$.

Pour $x > 1$: $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{x-1} = \ln(x+1) - \ln(x-1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-2}{x^2-1}$.

Autre base : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, donc $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

À vous – un résultat surprenant

À vous !

Dériver $f(x) = \ln(2x)$ de deux façons : (a) avec la règle de la chaîne ; (b) en simplifiant d'abord avec les propriétés du ln.

À vous – un résultat surprenant

À vous !

Dériver $f(x) = \ln(2x)$ de deux façons : (a) avec la règle de la chaîne ; (b) en simplifiant d'abord avec les propriétés du ln.

Réponse

(a) $f'(x) = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$ (b) $f(x) = \ln 2 + \ln x$, donc $f'(x) = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$.

$\ln(2x)$ et $\ln x$ ne diffèrent que d'une constante : leurs dérivées sont égales.

5. Fonctions trigonométriques composées

Propriété

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u' \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u' \qquad (\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$$

Exemples

$f(x) = \sin(3x^2) \;\Rightarrow\; f'(x) = 6x\cos(3x^2)$

$f(x) = \cos(4x) \;\Rightarrow\; f'(x) = -4\sin(4x)$

$f(x) = \tan(\sqrt{x}) \;\Rightarrow\; f'(x) = \sec^2(\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5. Fonctions trigonométriques composées

Propriété

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u' \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u' \qquad (\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$$

Exemples

$f(x) = \sin(3x^2) \;\Rightarrow\; f'(x) = 6x\cos(3x^2)$

$f(x) = \cos(4x) \;\Rightarrow\; f'(x) = -4\sin(4x)$

$f(x) = \tan(\sqrt{x}) \;\Rightarrow\; f'(x) = \sec^2(\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Attention

$(\sin(4x))' \neq \cos(4x)$ et $(\sin(4x))' \neq 4\cos x$: c'est $4\cos(4x)$.

Récapitulatif : la chaîne sous forme de tableau

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
u^n	$n\,u^{n-1}\,u'$	$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
e^u	$e^u\,u'$	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
a^u	$a^u \ln a \cdot u'$	$\tan u$	$\sec^2 u \cdot u'$

À retenir

C'est le tableau des dérivées usuelles, avec **un facteur u' en plus**. Si $u = x$, alors $u' = 1$ et on retrouve le tableau de base.

Exercices C – règle de la chaîne

Dériver :

1. $(2x+1)^6$
2. $\sqrt{3x^2+1}$
3. e^{5x-2}
4. $\ln(3x^2+1)$
5. $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
6. $\cos(2x^3)$
7. $\sqrt{1+\sin x}$
8. $e^{\sqrt{x}}$

Plus avancés :

9. $\ln\left((x^2+1)^3\right)$
10. e^{x^3+1}
11. $\sin(\sqrt{x})$
12. $\sqrt{1+\ln x}$
13. $(1+3x^2)^4$
14. $\frac{1}{(x^2-3x)^2}$
15. 3^{x^2}
16. $\tan^2(5x)$

Plusieurs couches : on dérive « comme on épluche un oignon »

$f(x) = \sqrt{1 + e^{x^2}}$

Plusieurs couches : on dérive « comme on épluche un oignon »

$f(x) = \sqrt{1 + e^{x^2}}$

Couches (de l'extérieur vers l'intérieur) :

$$\sqrt{\cdot} \longrightarrow 1 + e^{\cdot} \longrightarrow x^2$$

Plusieurs couches : on dérive « comme on épluche un oignon »

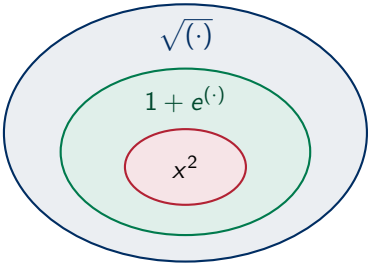
$f(x) = \sqrt{1 + e^{x^2}}$

Couches (de l'extérieur vers l'intérieur) :

$$\sqrt{\cdot} \longrightarrow 1 + e^{\cdot} \longrightarrow x^2$$

On dérive couche par couche, en multipliant :

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+e^{x^2}}}}_{\text{racine}} \cdot \underbrace{e^{x^2}}_{\text{exp.}} \cdot \underbrace{2x}_{x^2} = \frac{x\, e^{x^2}}{\sqrt{1+e^{x^2}}}.$$



Chaque couche donne **un facteur** dans la dérivée.

Compositions multiples : autres exemples

Exemple 1

$f(x) = \sin^3(2x) = \big(\sin(2x)\big)^3$ (couches : cube $\to$ sinus $\to 2x$)

$f'(x) = 3\sin^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 6\sin^2(2x)\cos(2x).$

Compositions multiples : autres exemples

Exemple 1

$f(x) = \sin^3(2x) = \big(\sin(2x)\big)^3$ (couches : cube $\to$ sinus $\to 2x$)

$f'(x) = 3\sin^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 6\sin^2(2x)\cos(2x).$

Exemple 2

$f(x) = \ln\big(\cos(x^2)\big)$ (couches : ln $\to$ cosinus $\to x^2$)

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x^2)} \cdot \big(-\sin(x^2)\big) \cdot 2x = -2x\tan(x^2)$ (là où $\cos(x^2) > 0$).

Compositions multiples : autres exemples

Exemple 1

$f(x) = \sin^3(2x) = \big(\sin(2x)\big)^3$ (couches : cube $\to$ sinus $\to 2x$)

$f'(x) = 3\sin^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 6\sin^2(2x)\cos(2x).$

Exemple 2

$f(x) = \ln\big(\cos(x^2)\big)$ (couches : ln $\to$ cosinus $\to x^2$)

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x^2)} \cdot \big(-\sin(x^2)\big) \cdot 2x = -2x\tan(x^2)$ (là où $\cos(x^2) > 0$).

Exemple 3

$f(x) = e^{\sqrt{3x+1}}$ (couches : exp $\to$ racine $\to 3x+1$)

$f'(x) = e^{\sqrt{3x+1}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \dfrac{3\,e^{\sqrt{3x+1}}}{2\sqrt{3x+1}}$ (pour $x > -\frac{1}{3}$).

Chaîne + produit, chaîne + quotient

Exemple 1 – produit dont un facteur est composé

$f(x) = x^2 e^{3x}$: $u = x^2$, $v = e^{3x}$, $u' = 2x$, $v' = 3e^{3x}$ (chaîne)

$f'(x) = 2x\, e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} = x\, e^{3x}(2 + 3x)$.

Chaîne + produit, chaîne + quotient

Exemple 1 – produit dont un facteur est composé

$f(x) = x^2 e^{3x}$: $u = x^2$, $v = e^{3x}$, $u' = 2x$, $v' = 3e^{3x}$ (chaîne)

$f'(x) = 2x\, e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} = x\, e^{3x}(2 + 3x)$.

Exemple 2 – produit avec une racine

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1 : \quad (\sqrt{1-x^2})' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Chaîne + produit, chaîne + quotient

Exemple 1 – produit dont un facteur est composé

$f(x) = x^2 e^{3x}$: $u = x^2$, $v = e^{3x}$, $u' = 2x$, $v' = 3e^{3x}$ (chaîne)

$f'(x) = 2x\, e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} = x\, e^{3x}(2 + 3x)$.

Exemple 2 – produit avec une racine

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1 : \quad (\sqrt{1-x^2})' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exemple 3 – chaîne dont l'intérieur est un quotient

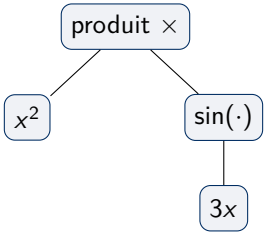
$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3 : f'(x) = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{3x^2}{(x+1)^4}.$$

Stratégie générale

Démarche

1. **Simplifier** si possible (puissances, propriétés de ln).
2. Trouver l'**opération principale** (la dernière effectuée) : somme, produit, quotient ou composition.
3. Appliquer la règle correspondante.
4. Pour chaque morceau qui reste à dériver, **recommencer** en 2.
5. **Simplifier / factoriser** le résultat.

Arbre de $f(x) = x^2 \sin(3x)$



$$f'(x) = 2x\sin(3x) + x^2 \cdot \underbrace{3\cos(3x)}_{\text{chaîne}}$$

Activité – quelle règle en premier ?

Sans dériver, identifiez l'**opération principale** : somme, produit, quotient ou chaîne. Justifiez chaque réponse en décrivant l'ordre des opérations pour calculer $f(1)$.

1. $x^3 \sin x$
2. $\sin(x^3)$
3. $\dfrac{e^x}{1+x^2}$
4. $(x\,e^x)^4$
5. $x^2 + \ln(3x)$
6. $\ln(x^2 \sin x)$
7. $\sqrt{x}\,\cos(2x)$
8. $e^x \cdot e^{2x}$

Activité – quelle règle en premier ?

Sans dériver, identifiez l'**opération principale** : somme, produit, quotient ou chaîne. Justifiez chaque réponse en décrivant l'ordre des opérations pour calculer $f(1)$.

1.	$x^3 \sin x$	produit	5.	$x^2 + \ln(3x)$	somme
2.	$\sin(x^3)$	chaîne	6.	$\ln(x^2 \sin x)$	chaîne *
3.	$\dfrac{e^x}{1+x^2}$	quotient	7.	$\sqrt{x}\,\cos(2x)$	produit
4.	$(x\,e^x)^4$	chaîne, puis produit	8.	$e^x \cdot e^{2x}$	simplifier : e^{3x}

* ou simplifier d'abord : $\ln(x^2) + \ln(\sin x)$, là où c'est défini.

Activité – quelle règle en premier ?

Sans dériver, identifiez l'**opération principale** : somme, produit, quotient ou chaîne. Justifiez chaque réponse en décrivant l'ordre des opérations pour calculer $f(1)$.

1.	$x^3 \sin x$	produit	5.	$x^2 + \ln(3x)$	somme
2.	$\sin(x^3)$	chaîne	6.	$\ln(x^2 \sin x)$	chaîne *
3.	$\dfrac{e^x}{1+x^2}$	quotient	7.	$\sqrt{x}\,\cos(2x)$	produit
4.	$(x\,e^x)^4$	chaîne, puis produit	8.	$e^x \cdot e^{2x}$	simplifier : e^{3x}

* ou simplifier d'abord : $\ln(x^2) + \ln(\sin x)$, là où c'est défini.

Défi : dériver 4 et 6

Activité – quelle règle en premier ?

Sans dériver, identifiez l'**opération principale** : somme, produit, quotient ou chaîne. Justifiez chaque réponse en décrivant l'ordre des opérations pour calculer $f(1)$.

1.	$x^3 \sin x$	produit	5.	$x^2 + \ln(3x)$	somme
2.	$\sin(x^3)$	chaîne	6.	$\ln(x^2 \sin x)$	chaîne *
3.	$\dfrac{e^x}{1+x^2}$	quotient	7.	$\sqrt{x}\,\cos(2x)$	produit
4.	$(x\,e^x)^4$	chaîne, puis produit	8.	$e^x \cdot e^{2x}$	simplifier : e^{3x}

* ou simplifier d'abord : $\ln(x^2) + \ln(\sin x)$, là où c'est défini.

Défi : dériver 4 et 6

(4) $4(xe^x)^3 \cdot e^x(1+x) = 4x^3e^{4x}(1+x)$ (6) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{2}{x} + \cot x$

Exercices D – combiner les règles

Pour chaque fonction, identifier l'opération principale, puis dériver et simplifier :

1. $x^3 e^{-2x}$
2. $x \ln(x^2 + 1)$
3. $e^{-x} \sin x$
4. $\dfrac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$
5. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
6. $x^2 \cos(3x)$
7. $\sqrt{x}\, e^{-x}$
8. $(x^2 + 1)^3 (2x - 1)^2$

Application 1 : tangente à un cercle

Le demi-cercle supérieur de rayon 5 :
$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Tangente en $x = 3$?

Application 1 : tangente à un cercle

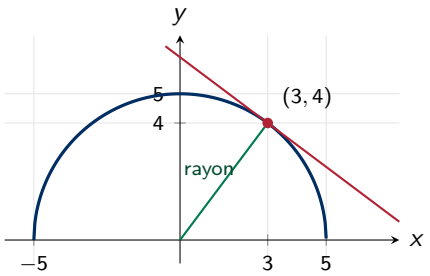
Le demi-cercle supérieur de rayon 5 :
$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Tangente en $x = 3$?

- $f(3) = \sqrt{16} = 4$: point $(3, 4)$.
- $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$
  $(-5 < x < 5)$, $f'(3) = -\frac{3}{4}$.
- Tangente : $y = 4 - \frac{3}{4}(x - 3) = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

Application 1 : tangente à un cercle

Le demi-cercle supérieur de rayon 5 :
$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Tangente en $x = 3$?

- $f(3) = \sqrt{16} = 4$: point $(3, 4)$.
- $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$
  $(-5 < x < 5)$, $f'(3) = -\frac{3}{4}$.
- Tangente : $y = 4 - \frac{3}{4}(x - 3) = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.



À retenir

Le rayon vers $(3, 4)$ a pente $\frac{4}{3}$ et $\frac{4}{3} \cdot (-\frac{3}{4}) = -1$: on retrouve que la tangente à un cercle est **perpendiculaire au rayon**.

Application 2 : la courbe en cloche $f(x) = e^{-x^2}$

Par la chaîne :
$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\, e^{-x^2}$.

Application 2 : la courbe en cloche $f(x) = e^{-x^2}$

Par la chaîne :
$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\, e^{-x^2}$.

Comme $e^{-x^2} > 0$, le signe de f' est celui de $-2x$:

- $x < 0$: $f' > 0$, f croît ;
- $x = 0$: $f' = 0$, tangente horizontale au sommet $(0, 1)$;
- $x > 0$: $f' < 0$, f décroît.

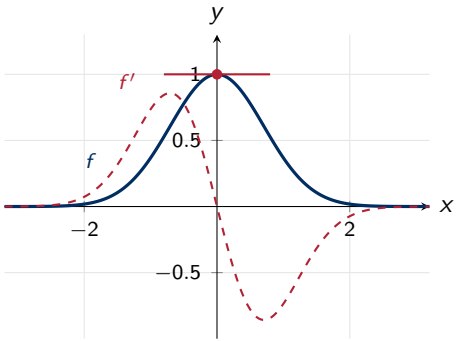
Application 2 : la courbe en cloche $f(x) = e^{-x^2}$

Par la chaîne :
$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\, e^{-x^2}$.

Comme $e^{-x^2} > 0$, le signe de f' est celui de $-2x$:

- $x < 0$: $f' > 0$, f croît ;
- $x = 0$: $f' = 0$, tangente horizontale au sommet $(0, 1)$;
- $x > 0$: $f' < 0$, f décroît.

La forme factorisée donnée par la chaîne rend l'étude du signe immédiate. Cette courbe est centrale en probabilités (loi normale).



Application 3 : taux de variation et approximation

Décroissance radioactive

La masse (en g) d'un échantillon après t années est $m(t) = 80\,e^{-0{,}05t}$.

$$m'(t) = 80\,e^{-0{,}05t} \cdot (-0{,}05) = -4\,e^{-0{,}05t} \text{ g/an.}$$

En $t = 0$: $m'(0) = -4$ g/an ; en $t = 20$: $m'(20) = -4e^{-1} \approx -1{,}47$ g/an. La masse diminue de moins en moins vite. (Remarque : $m'(t) = -0{,}05\,m(t)$.)

Application 3 : taux de variation et approximation

Décroissance radioactive

La masse (en g) d'un échantillon après t années est $m(t) = 80\,e^{-0{,}05t}$.

$$m'(t) = 80\,e^{-0{,}05t} \cdot (-0{,}05) = -4\,e^{-0{,}05t} \text{ g/an.}$$

En $t = 0$: $m'(0) = -4$ g/an ; en $t = 20$: $m'(20) = -4e^{-1} \approx -1{,}47$ g/an. La masse diminue de moins en moins vite. (Remarque : $m'(t) = -0{,}05\,m(t)$.)

Approximation linéaire de $\ln(1{,}02)$ (promise en partie 1)

$f(x) = \ln x$, $a = 1$: $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, donc $\ln x \approx x - 1$ près de 1.

$$\ln(1{,}02) \approx 0{,}02 \qquad \text{(calculatrice : } 0{,}019803\ldots\text{)}$$

Application 4 : le mouvement harmonique

Une masse attachée à un ressort oscille ; sa position (en cm) est

$$x(t) = 4\cos(3t) \qquad (t \text{ en s}).$$

Application 4 : le mouvement harmonique

Une masse attachée à un ressort oscille ; sa position (en cm) est

$$x(t) = 4\cos(3t) \qquad (t \text{ en s}).$$

Vitesse (chaîne, $u = 3t$) :

$$v(t) = x'(t) = -4\sin(3t) \cdot 3 = -12\sin(3t).$$

Application 4 : le mouvement harmonique

Une masse attachée à un ressort oscille ; sa position (en cm) est

$$x(t) = 4\cos(3t) \qquad (t \text{ en s}).$$

Vitesse (chaîne, $u = 3t$) :

$$v(t) = x'(t) = -4\sin(3t) \cdot 3 = -12\sin(3t).$$

Accélération (dérivée de la vitesse) :

$$a(t) = v'(t) = -36\cos(3t) = -9\,x(t).$$

Application 4 : le mouvement harmonique

Une masse attachée à un ressort oscille ; sa position (en cm) est

$$x(t) = 4\cos(3t) \qquad (t \text{ en s}).$$

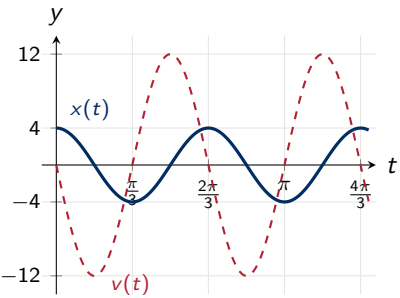
Vitesse (chaîne, $u = 3t$) :

$$v(t) = x'(t) = -4\sin(3t)\cdot 3 = -12\sin(3t).$$

Accélération (dérivée de la vitesse) :

$$a(t) = v'(t) = -36\cos(3t) = -9\,x(t).$$

L'accélération est proportionnelle à la position et de signe contraire : c'est la loi du ressort, que vous retrouverez en physique.



La vitesse est maximale ($|v| = 12$ cm/s) quand la masse passe par $x = 0$.

Exercices E – applications

1. Équation de la tangente à $f(x) = e^{2x}$ au point d'abscisse 0.
2. Équation de la tangente à $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ au point d'abscisse 2.
3. Trouver le point où la courbe de $f(x) = x\,e^{-x}$ a une tangente horizontale.
4. Sur $[0, 2\pi]$, trouver les x où $f(x) = \sin x + \cos x$ a une tangente horizontale.
5. Une population évolue selon $P(t) = 500\,e^{0{,}04t}$ (t en années). À quel rythme croît-elle après 10 ans ?
6. Estimer $e^{0{,}1}$ à l'aide de l'approximation linéaire de e^x en $a = 0$.
7. La position d'un objet est $x(t) = 3\sin(2t)$ cm (t en s). Calculer sa vitesse et son accélération à $t = \frac{\pi}{6}$ s.

Récapitulatif de la partie 2

Dérivées usuelles

$(e^x)' = e^x$ $\quad$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ $\quad$ $(a^x)' = a^x \ln a$

Fonction composée

$h(g(x))$: g intérieure (en premier), h extérieure (en dernier).

Règle de la chaîne

$$\Big(h(g(x))\Big)' = h'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

Attention

- Ne pas oublier le facteur u'.
- Garder l'intérieur **intact** dans h'.
- Une couche = un facteur.
- Opération principale d'abord (somme, produit, quotient ou chaîne).

Billet de sortie

Billet de sortie

1. Dériver $f(x) = e^{x^2} \cos x$.
2. Un étudiant écrit $\left(\sin(x^2)\right)' = \cos(2x)$. Expliquez son erreur en une phrase.
3. De 1 à 4, à quel point vous sentez-vous capable d'appliquer seul la règle de la chaîne ?
4. Quel point de cette partie reste le plus flou pour vous ?

Autoévaluation

Je suis capable de…	**Exercices**	**Acquis**	**À revoir**
utiliser les radians, les valeurs remarquables et les identités	R1–R5	☐	☐
dériver e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ avec produit et quotient	A1–A6	☐	☐
identifier les fonctions intérieure et extérieure	B1–B8	☐	☐
appliquer la règle de la chaîne (une ou plusieurs couches)	C1–C16	☐	☐
combiner chaîne, produit et quotient	D1–D8	☐	☐
utiliser la dérivée : tangentes, approximations, taux	E1–E7	☐	☐

Pour chaque « À revoir » : refaire les exercices **sans regarder les réponses**, comparer, puis venir en disponibilité avec vos questions.

Réponses – exercices R (trigonométrie)

1. $150^\circ = \dfrac{5\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{4} = 315^\circ$.
2. $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$; $\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$.
3. (a) $x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}$ (b) $x = \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$ (c) $x = \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$.
4. (a) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin x$ (b) $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ (c) $\cos^2 x \sec^2 x = 1$.
5. $\cos\theta = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\dfrac{4}{5}$ (2^{e} quadrant) ; $\tan\theta = \dfrac{3/5}{-4/5} = -\dfrac{3}{4}$.

Réponses – exercices A et B

A. (1) $3e^x - \dfrac{2}{x} + 5\cos x$; (2) $e^x(1+x)$; (3) $2x\ln x + x$; (4) $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$; (5) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$;

(6) $\dfrac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} = -\dfrac{1}{1+\sin x}$.

B.

	1	2	3	4	5	6	7	8
intérieure	x^2+1	$4-3x$	$2x+1$	$5x^2$	$\sqrt{x}$	$\cos x$	$\sin x$	$1-x$
extérieure	u^5	$\sqrt{u}$	u^{-3}	$\cos u$	$\ln u$	u^3	e^u	$\tan u$

Bonus : $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2-4}$ et $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 - 4 = x - 4$ $(x \geq 0)$: différentes.

Réponses – exercices C

1. $12(2x+1)^5$
2. $\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$
3. $5e^{5x-2}$
4. $\dfrac{6x}{3x^2+1}$
5. $-\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$
6. $-6x^2\sin(2x^3)$
7. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$
8. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
9. $\dfrac{6x}{x^2+1}$
10. $3x^2e^{x^3+1}$
11. $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
12. $\dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$
13. $24x(1+3x^2)^3$
14. $-\dfrac{2(2x-3)}{(x^2-3x)^3}$
15. $2x\ln 3\cdot 3^{x^2}$
16. $10\tan(5x)\sec^2(5x)$

Réponses – exercices D et E

D. (1) $x^2e^{-2x}(3-2x)$; (2) $\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}$; (3) $e^{-x}(\cos x-\sin x)$; (4) $\dfrac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$;
(5) $\dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$; (6) $2x\cos(3x)-3x^2\sin(3x)$; (7) $\dfrac{e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$;
(8) $6x(x^2+1)^2(2x-1)^2+4(x^2+1)^3(2x-1)=2(x^2+1)^2(2x-1)(8x^2-3x+2)$.

E.

1. $y=2x+1$
2. $f(2)=\ln 1=0$, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}$, $f'(2)=4$: $y=4x-8$
3. $f'(x)=e^{-x}(1-x)=0 \iff x=1$: point $\left(1,\frac{1}{e}\right)$
4. $\cos x-\sin x=0 \iff \tan x=1$: $x=\frac{\pi}{4}$ et $x=\frac{5\pi}{4}$
5. $P'(t)=20\,e^{0{,}04t}$; $P'(10)=20e^{0{,}4}\approx 29{,}8$ individus/an
6. $e^x\approx 1+x$, donc $e^{0{,}1}\approx 1{,}1$ (calculatrice : 1,10517…)
7. $v(t)=6\cos(2t)$, $v\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$ cm/s ; $a(t)=-12\sin(2t)$, $a\left(\frac{\pi}{6}\right)=-6\sqrt{3}\approx -10{,}4$ cm/s^2