Chapitre 7 - La règle de l'Hôpital

Calcul de limites et formes indéterminées

Mohamed Nouidha

Collège Sainte-Anne

Automne 2026

Plan

1. Pourquoi une nouvelle règle ?
2. La règle de l'Hôpital
3. Forme $\frac{0}{0}$
4. Forme $\frac{\infty}{\infty}$
5. Deux erreurs à éviter
6. Les autres formes indéterminées
   - Forme $0 \cdot \infty$
   - Forme $\infty - \infty$
   - Formes 0^0, 1^∞, ∞^0
7. Synthèse
8. Réponses aux exercices

Objectifs

À la fin de ce chapitre, vous devriez être capable de :

1. reconnaître une **forme indéterminée** par substitution directe ;
2. appliquer la **règle de l'Hôpital** aux formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$, au besoin plusieurs fois ;
3. transformer les formes $0 \cdot \infty$ et $\infty - \infty$ en un quotient ;
4. calculer les limites des formes 0^0, 1^∞ et ∞^0 à l'aide du logarithme ;
5. comparer la croissance de $\ln x$, x^p et e^x à l'infini.

Ce qu'on sait déjà faire

Face à une limite, on tente d'abord la **substitution directe**. Si on obtient $\frac{0}{0}$, on dispose de deux techniques algébriques :

Factorisation

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Conjugué

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

Ce qu'on sait déjà faire

Face à une limite, on tente d'abord la **substitution directe**. Si on obtient $\frac{0}{0}$, on dispose de deux techniques algébriques :

Factorisation

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Conjugué

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

Mais aucune de ces techniques ne fonctionne pour :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Ce qu'on sait déjà faire

Face à une limite, on tente d'abord la **substitution directe**. Si on obtient $\frac{0}{0}$, on dispose de deux techniques algébriques :

Factorisation

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Conjugué

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

Mais aucune de ces techniques ne fonctionne pour :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Le problème

Le numérateur et le dénominateur sont de **natures différentes** (exponentielle, trigonométrique, logarithme, polynôme) : il n'y a rien à simplifier.

Une forme indéterminée est une compétition

Trois limites de la forme $\frac{0}{0}$ quand $x \to 0^+$, trois réponses différentes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2} = +\infty$$

Une forme indéterminée est une compétition

Trois limites de la forme $\frac{0}{0}$ quand $x \to 0^+$, trois réponses différentes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2} = +\infty$$

Même chose pour $\frac{\infty}{\infty}$ quand $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x} = 3 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

Une forme indéterminée est une compétition

Trois limites de la forme $\frac{0}{0}$ quand $x \to 0^+$, trois réponses différentes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2} = +\infty$$

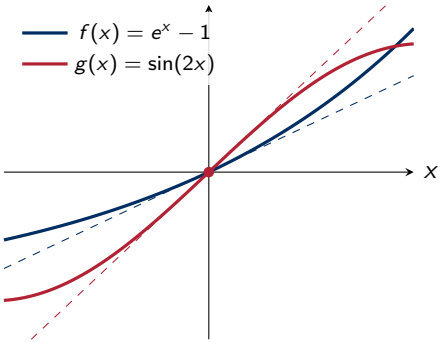
Même chose pour $\frac{\infty}{\infty}$ quand $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x} = 3 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

Idée clé

Le résultat dépend de **la vitesse** à laquelle le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 (ou vers ∞). Or la vitesse de variation d'une fonction, c'est exactement ce que mesure la **dérivée**.

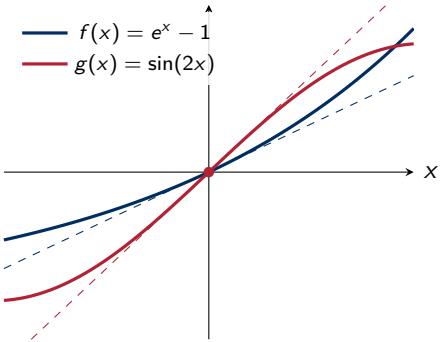
L'idée : comparer les pentes



Les deux fonctions valent 0 en $x = 0$. Près de 0, chaque courbe se confond avec sa **tangente** (pointillés) :

$$f(x) \approx f'(0)\,x = x, \qquad g(x) \approx g'(0)\,x = 2x$$

L'idée : comparer les pentes



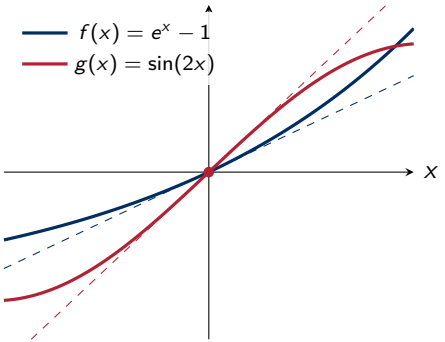
Les deux fonctions valent 0 en $x = 0$. Près de 0, chaque courbe se confond avec sa **tangente** (pointillés) :

$$f(x) \approx f'(0)\,x = x, \qquad g(x) \approx g'(0)\,x = 2x$$

Donc, pour x proche de 0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(0)\,x}{g'(0)\,x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2}$$

L'idée : comparer les pentes



Les deux fonctions valent 0 en $x = 0$. Près de 0, chaque courbe se confond avec sa **tangente** (pointillés) :

$$f(x) \approx f'(0)\,x = x, \qquad g(x) \approx g'(0)\,x = 2x$$

Donc, pour x proche de 0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(0)\,x}{g'(0)\,x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2}$$

À retenir

Pour comparer deux fonctions qui tendent vers 0, on compare leurs **dérivées**.

Énoncé

Règle de l'Hôpital

Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de la forme $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pourvu que la limite de droite existe (ou soit $\pm\infty$).

Valable aussi pour :

- $x \to a^+$ ou $x \to a^-$;
- $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Attention

On dérive f et g **séparément**. Ce n'est **pas** la dérivée du quotient !

Méthode

Méthode en 4 étapes

1. **Substituer** pour identifier la forme. Si ce n'est pas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on **n'applique pas** la règle.
2. **Dériver** le numérateur et le dénominateur **séparément**.
3. **Simplifier** l'expression obtenue.
4. **Substituer à nouveau.** Si la forme est encore $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, retour à l'étape 2.

Notation

On écrit $\overset{\text{H}}{=}$ pour signaler l'application de la règle, et on indique la forme :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \left(\text{forme } \tfrac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple 1 – un cas qu'on savait déjà faire

Exemple 1

Calculer $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

Exemple 1 – un cas qu'on savait déjà faire

Exemple 1

Calculer $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

Étape 1. En $x = 2$: $2^3 - 8 = 0$ et $2^2 - 4 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

Exemple 1 – un cas qu'on savait déjà faire

Exemple 1

Calculer $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

Étape 1. En $x=2$: $2^3-8=0$ et $2^2-4=0$. Forme $\frac{0}{0}$.

Étapes 2 à 4.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3(4)}{2(2)} = \boxed{3}$$

Exemple 1 – un cas qu'on savait déjà faire

Exemple 1

Calculer $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

Étape 1. En $x=2$: $2^3-8=0$ et $2^2-4=0$. Forme $\frac{0}{0}$.

Étapes 2 à 4.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3(4)}{2(2)} = \boxed{3}$$

Vérification par factorisation

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2} \xrightarrow[x\to 2]{} \frac{12}{4} = 3$$

Les deux méthodes donnent le même résultat.

Exemple 2 – exponentielle et sinus

Exemple 2

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin x}$.

Exemple 2 – exponentielle et sinus

Exemple 2

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin x}$.

En $x = 0$: $e^0 - 1 = 0$ et $\sin 0 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

Exemple 2 – exponentielle et sinus

Exemple 2

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$.

En $x = 0$: $e^0 - 1 = 0$ et $\sin 0 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2e^0}{\cos 0} = \boxed{2}$$

Exemple 2 – exponentielle et sinus

Exemple 2

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$.

En $x = 0$: $e^0 - 1 = 0$ et $\sin 0 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2e^0}{\cos 0} = \boxed{2}$$

Ne pas oublier la règle de la chaîne

$\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$ et non e^{2x}. La règle de l'Hôpital utilise **toutes** les règles de dérivation vues jusqu'ici.

Exemple 3 – appliquer la règle deux fois

Exemple 3

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

Exemple 3 – appliquer la règle deux fois

Exemple 3

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

En $x = 0$: $1 - \cos 0 = 0$ et $0^2 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

Exemple 3 – appliquer la règle deux fois

Exemple 3

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

En $x = 0$: $1 - \cos 0 = 0$ et $0^2 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0})$$

Exemple 3 – appliquer la règle deux fois

Exemple 3

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

En $x = 0$: $1 - \cos 0 = 0$ et $0^2 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0})$$

La nouvelle limite est **encore** de la forme $\frac{0}{0}$: on applique la règle une deuxième fois.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Exemple 3 – appliquer la règle deux fois

Exemple 3

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

En $x=0$: $1-\cos 0 = 0$ et $0^2 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0})$$

La nouvelle limite est **encore** de la forme $\frac{0}{0}$: on applique la règle une deuxième fois.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Réflexe

On **vérifie la forme avant chaque application**, pas seulement la première fois.

Exemple 4 – simplifier avant de substituer

Exemple 4

Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$.

Exemple 4 – simplifier avant de substituer

Exemple 4

Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$.

En $x = 1$: $\sqrt{1} - 1 = 0$ et $\ln 1 = 0$. Forme $\frac{0}{0}$.

Exemple 4 – simplifier avant de substituer

Exemple 4

Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$.

En $x=1$: $\sqrt{1}-1=0$ et $\ln 1=0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Exemple 4 – simplifier avant de substituer

Exemple 4

Calculer $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$.

En $x=1$: $\sqrt{1}-1=0$ et $\ln 1=0$. Forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Étape 3 : simplifier

Après dérivation, on obtient souvent une **fraction de fractions**. On la simplifie **avant** de substituer : le calcul est plus court et on évite des erreurs.

Exemple 5 – logarithme contre racine

Exemple 5

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Exemple 5 – logarithme contre racine

Exemple 5

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Quand $x \to +\infty$: $\ln x \to +\infty$ et $\sqrt{x} \to +\infty$. Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple 5 – logarithme contre racine

Exemple 5

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Quand $x \to +\infty$: $\ln x \to +\infty$ et $\sqrt{x} \to +\infty$. Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \boxed{0}$$

Exemple 5 – logarithme contre racine

Exemple 5

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Quand $x \to +\infty$: $\ln x \to +\infty$ et $\sqrt{x} \to +\infty$. Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \boxed{0}$$

Interprétation

$\ln x$ tend vers l'infini, mais **beaucoup plus lentement** que $\sqrt{x}$.

Exemple 6 – exponentielle contre polynôme

Exemple 6

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$.

Exemple 6 – exponentielle contre polynôme

Exemple 6

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$.

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On applique la règle autant de fois que nécessaire :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2} \quad (\text{forme } \tfrac{\infty}{\infty}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} \quad (\text{forme } \tfrac{\infty}{\infty}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = \boxed{+\infty}$$

Exemple 6 – exponentielle contre polynôme

Exemple 6

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$.

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On applique la règle autant de fois que nécessaire :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2} \quad (\text{forme } \tfrac{\infty}{\infty}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} \quad (\text{forme } \tfrac{\infty}{\infty}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = \boxed{+\infty}$$

Croissances comparées

Pour tout $p > 0$: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^p} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = 0$

À l'infini : $\ln x \ll x^p \ll e^x$

Exemple 7 – simplifier plutôt que s'acharner

Exemple 7

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+\ln x}{x^2+1}$.

Exemple 7 – simplifier plutôt que s'acharner

Exemple 7

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+\ln x}{x^2+1}$.

Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+\ln x}{x^2+1} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+\frac{1}{x}}{2x} \quad (\text{forme } \tfrac{\infty}{\infty})$$

Exemple 7 – simplifier plutôt que s'acharner

Exemple 7

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+\ln x}{x^2+1}$.

Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+\ln x}{x^2+1} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+\frac{1}{x}}{2x} \quad (\text{forme } \tfrac{\infty}{\infty})$$

Plutôt que d'appliquer la règle une deuxième fois, on **simplifie** en divisant par x :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{2x^2}\right) = \boxed{2}$$

Exemple 7 – simplifier plutôt que s'acharner

Exemple 7

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+\ln x}{x^2+1}$.

Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+\ln x}{x^2+1} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+\frac{1}{x}}{2x} \quad (\text{forme } \tfrac{\infty}{\infty})$$

Plutôt que d'appliquer la règle une deuxième fois, on **simplifie** en divisant par x :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{2x^2}\right) = \boxed{2}$$

À retenir

La règle de l'Hôpital est un outil parmi d'autres. Dès qu'une simplification permet de conclure, on l'utilise.

Erreur 1 – appliquer la règle sans forme indéterminée

Calculer $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

Raisonnement faux

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{1-\cos x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\to \dfrac{-1}{0}$: la limite n'existerait pas ?

Raisonnement correct

Substitution directe :

$$\frac{\sin \pi}{1-\cos \pi} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

Pas de forme indéterminée : c'est terminé.

Erreur 1 – appliquer la règle sans forme indéterminée

Calculer $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

Raisonnement faux

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{1-\cos x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\to \dfrac{-1}{0}$: la limite n'existerait pas ?

Raisonnement correct

Substitution directe :

$$\frac{\sin \pi}{1-\cos \pi} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

Pas de forme indéterminée : c'est terminé.

À retenir

Appliquer la règle hors d'une forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ donne un résultat **faux**. L'étape 1 n'est pas optionnelle.

Erreur 2 – confondre avec la dérivée du quotient

Faux

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$$

Correct

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Erreur 2 – confondre avec la dérivée du quotient

Faux

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$$

Correct

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple – $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$, forme $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \sec^2 0 = \boxed{1}$$

On dérive le haut ($\tan x \to \sec^2 x$), puis le bas ($x \to 1$). Aucune règle du quotient.

Erreur 2 – confondre avec la dérivée du quotient

Faux

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$$

Correct

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple – $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$, forme $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \sec^2 0 = \boxed{1}$$

On dérive le haut ($\tan x \to \sec^2 x$), puis le bas ($x \to 1$). Aucune règle du quotient.

À vous !

Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}$ en justifiant chaque étape.

Exercices A – formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Identifier la forme, puis calculer la limite :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^3-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\ln(1+x)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{x\sin x}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{e^{2x}}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\cos x}{x+1}$

Se ramener à un quotient

La règle ne s'applique qu'aux formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. Les autres formes indéterminées doivent d'abord être **transformées en quotient**.

Forme	**Transformation**
$0 \cdot \infty$	réécrire le produit en quotient
$\infty - \infty$	mettre au même dénominateur (ou conjugué)
$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$	prendre le logarithme

Se ramener à un quotient

La règle ne s'applique qu'aux formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. Les autres formes indéterminées doivent d'abord être **transformées en quotient**.

Forme	Transformation
$0 \cdot \infty$	réécrire le produit en quotient
$\infty - \infty$	mettre au même dénominateur (ou conjugué)
$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$	prendre le logarithme

Ne pas confondre

$\infty + \infty,\ \infty \cdot \infty,\ \frac{c}{0}\ (c \neq 0)$ et $0^{+\infty}$ ne sont **pas** des formes indéterminées : on conclut directement.

Forme $0 \cdot \infty$ – stratégie

Méthode : transformer le produit en quotient

Si $f(x) \to 0$ et $g(x) \to \pm\infty$, on envoie l'un des facteurs au dénominateur :

$$f(x)\,g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{(forme } \tfrac{0}{0}\text{)} \qquad \text{ou} \qquad f(x)\,g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{(forme } \tfrac{\infty}{\infty}\text{)}$$

Forme $0 \cdot \infty$ – stratégie

Méthode : transformer le produit en quotient

Si $f(x) \to 0$ et $g(x) \to \pm\infty$, on envoie l'un des facteurs au dénominateur :

$$f(x)\,g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0}) \qquad \text{ou} \qquad f(x)\,g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad (\text{forme } \tfrac{\infty}{\infty})$$

Lequel envoyer au dénominateur ?

- On garde $\ln x$ au **numérateur** (sa dérivée $\frac{1}{x}$ est simple).
- On envoie les puissances x^p et les exponentielles au **dénominateur**.

Exemple 8 – bon choix et mauvais choix

Exemple 8

Calculer $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$. Forme $0 \cdot (-\infty)$.

Exemple 8 – bon choix et mauvais choix

Exemple 8

Calculer $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$. Forme $0\cdot(-\infty)$.

Bon choix : $\ln x$ en haut, x en bas.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forme } \tfrac{-\infty}{+\infty}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = \boxed{0}$$

Exemple 8 – bon choix et mauvais choix

Exemple 8

Calculer $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$. Forme $0\cdot(-\infty)$.

Bon choix : $\ln x$ en haut, x en bas.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forme } \tfrac{-\infty}{+\infty}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = \boxed{0}$$

Mauvais choix : x en haut, $\ln x$ en bas.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-x(\ln x)^2\right)$$

De nouveau une forme $0\cdot\infty$, plus compliquée qu'au départ.

Exemple 9 – avec la règle de la chaîne

Exemple 9

Calculer $\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Forme $\infty \cdot 0$.

Exemple 9 – avec la règle de la chaîne

Exemple 9

Calculer $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Forme $\infty\cdot 0$.

On envoie x au dénominateur sous la forme $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 0 = \boxed{1}$$

Exemple 9 – avec la règle de la chaîne

Exemple 9

Calculer $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Forme $\infty\cdot 0$.

On envoie x au dénominateur sous la forme $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 0 = \boxed{1}$$

À retenir

Les facteurs $-\frac{1}{x^2}$ provenant de la règle de la chaîne se simplifient : c'est fréquent quand $\frac{1}{x}$ apparaît dans l'expression.

Exercices B – forme $0 \cdot \infty$

Identifier la forme, réécrire en quotient, puis calculer :

1. $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$
2. $\lim_{x \to +\infty} x^3 e^{-x}$
3. $\lim_{x \to +\infty} x \left(e^{1/x} - 1 \right)$
4. $\lim_{x \to 0^+} \sin x \ln x$
5. $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$
6. $\lim_{x \to -\infty} x e^x$

Forme $\infty - \infty$

Méthode

On **met au même dénominateur** pour obtenir un quotient $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Si l'expression contient une racine, on pense plutôt au **conjugué**.

Forme $\infty - \infty$

Méthode

On **met au même dénominateur** pour obtenir un quotient $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Si l'expression contient une racine, on pense plutôt au **conjugué**.

Exemple 10

Calculer $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$. Forme $+\infty - (+\infty)$.

Forme $\infty - \infty$

Méthode

On **met au même dénominateur** pour obtenir un quotient $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Si l'expression contient une racine, on pense plutôt au **conjugué**.

Exemple 10

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$. Forme $+\infty - (+\infty)$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0})$$

Forme $\infty - \infty$

Méthode

On **met au même dénominateur** pour obtenir un quotient $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Si l'expression contient une racine, on pense plutôt au **conjugué**.

Exemple 10

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. Forme $+\infty-(+\infty)$.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x - x}{x\sin x} \quad \text{(forme } \tfrac{0}{0}\text{)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \quad \text{(forme } \tfrac{0}{0}\text{)} \overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

Exercices C – forme $\infty - \infty$

Identifier la forme, choisir une stratégie, puis calculer :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\csc x-\cot x\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

Pourquoi 1^{∞} est indéterminé

On pourrait croire que $1^{\infty} = 1$. Calculons $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ pour de grandes valeurs de x :

x	1	10	100	1 000	100 000
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2	2,5937	2,7048	2,7169	2,7183

Pourquoi 1^{∞} est indéterminé

On pourrait croire que $1^{\infty} = 1$. Calculons $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ pour de grandes valeurs de x :

x	1	10	100	1 000	100 000
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$	2	2,5937	2,7048	2,7169	2,7183

La base tend vers 1, mais l'exposant grandit : il y a **compétition**, et la limite semble être $e \approx 2{,}718$.

Pourquoi 1^∞ est indéterminé

On pourrait croire que $1^\infty = 1$. Calculons $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ pour de grandes valeurs de x :

x	1	10	100	1 000	100 000
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2,5937	2,7048	2,7169	2,7183

La base tend vers 1, mais l'exposant grandit : il y a **compétition**, et la limite semble être $e \approx 2{,}718$.

Idée

Le logarithme transforme une puissance en produit : $\ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\,\ln f(x)$

On se ramène ainsi à une forme $0 \cdot \infty$, que l'on sait traiter.

Méthode du logarithme

Méthode – formes 0^0, 1^∞, ∞^0

Pour calculer $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$:

1. poser $h(x) = f(x)^{g(x)}$, de sorte que $\ln h(x) = g(x) \ln f(x)$;
2. calculer $L = \lim_{x \to a} \ln h(x)$ avec la règle de l'Hôpital ;
3. conclure : $\lim_{x \to a} h(x) = e^L$.

Erreur fréquente

Ne pas s'arrêter à L ! On a calculé la limite de $\ln h(x)$, pas celle de $h(x)$. La réponse est e^L.

Exemple 11 – forme 0^0

Exemple 11

Calculer $\lim_{x \to 0^+} x^x$. Forme 0^0.

Exemple 11 – forme 0^0

Exemple 11

Calculer $\lim_{x \to 0^+} x^x$. Forme 0^0.

1. Posons $h(x) = x^x$. Alors $\ln h(x) = x \ln x$.

Exemple 11 – forme 0^0

Exemple 11

Calculer $\lim_{x \to 0^+} x^x$. Forme 0^0.

1. Posons $h(x) = x^x$. Alors $\ln h(x) = x \ln x$.

2. Cette limite a été calculée à l'exemple 8 :

$$L = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Exemple 11 – forme 0^0

Exemple 11

Calculer $\lim_{x \to 0^+} x^x$. Forme 0^0.

1. Posons $h(x) = x^x$. Alors $\ln h(x) = x \ln x$.

2. Cette limite a été calculée à l'exemple 8 :

$$L = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

3. Donc $\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = \boxed{1}$.

Exemple 11 – forme 0^0

Exemple 11

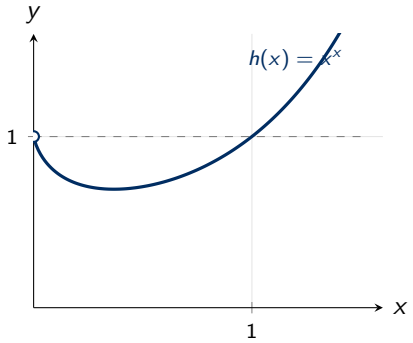
Calculer $\lim_{x \to 0^+} x^x$. Forme 0^0.

1. Posons $h(x) = x^x$. Alors $\ln h(x) = x \ln x$.

2. Cette limite a été calculée à l'exemple 8 :

$$L = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

3. Donc $\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = \boxed{1}$.



Exemple 12 – forme 1^∞ : le nombre e

Exemple 12

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Forme 1^∞.

Exemple 12 – forme 1^∞ : le nombre e

Exemple 12

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Forme 1^∞.

1. $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, donc $\ln h(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (forme $\infty\cdot 0$).

Exemple 12 – forme 1^∞ : le nombre e

Exemple 12

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. Forme 1^∞.

1. $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, donc $\ln h(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (forme $\infty\cdot 0$).

2. On réécrit en quotient et on applique la règle :

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0}) \overset{\mathsf{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

Exemple 12 – forme 1^∞ : le nombre e

Exemple 12

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. Forme 1^∞.

1. $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, donc $\ln h(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (forme $\infty\cdot 0$).

2. On réécrit en quotient et on applique la règle :

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0}) \overset{\mathsf{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

3. Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^1=\boxed{e}$, comme le suggérait le tableau.

Exemple 13 – forme ∞^0

Exemple 13

Calculer $\lim_{x \to +\infty} x^{1/x}$. Forme ∞^0.

Exemple 13 – forme ∞^0

Exemple 13

Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$. Forme ∞^0.

1. $h(x) = x^{1/x}$, donc $\ln h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x = \dfrac{\ln x}{x}$ (forme $\frac{\infty}{\infty}$).

Exemple 13 – forme ∞^0

Exemple 13

Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$. Forme ∞^0.

1. $h(x) = x^{1/x}$, donc $\ln h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x = \dfrac{\ln x}{x}$ (forme $\frac{\infty}{\infty}$).

2. $L = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0.$

Exemple 13 – forme ∞^0

Exemple 13

Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$. Forme ∞^0.

1. $h(x) = x^{1/x}$, donc $\ln h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x = \dfrac{\ln x}{x}$ (forme $\frac{\infty}{\infty}$).

2. $L = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0.$

3. Donc $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = \boxed{1}$.

Exemple 13 – forme ∞^0

Exemple 13

Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$. Forme ∞^0.

1. $h(x) = x^{1/x}$, donc $\ln h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x = \dfrac{\ln x}{x}$ (forme $\frac{\infty}{\infty}$).

2. $L = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0.$

3. Donc $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = \boxed{1}$.

Interprétation

La base grandit sans borne, mais l'exposant $\frac{1}{x}$ la ramène vers 1 : par exemple, $100^{1/100} \approx 1{,}047$.

Exercices D – formes 0^0, 1^∞, ∞^0

Identifier la forme, puis calculer la limite par la méthode du logarithme :

1. $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$
2. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$
3. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$
4. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$
5. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$
6. $\lim_{x\to+\infty}(e^x+x)^{1/x}$

Récapitulatif

Forme	Stratégie	Exemple type
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$	appliquer la règle directement	$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} = 2$
$0 \cdot \infty$	réécrire en quotient (garder ln en haut)	$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$
$\infty - \infty$	même dénominateur ou conjugué	$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$
$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$	calculer $L = \lim \ln h(x)$, répondre e^L	$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Exercices E – synthèse

Toutes les formes sont mélangées, et certaines limites ne sont **pas** indéterminées :

1. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x + 1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \left(1 - \cos\dfrac{1}{x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$

À retenir

Points clés

- On **vérifie la forme** avant **chaque** application de la règle.
- On dérive le numérateur et le dénominateur **séparément**.
- On **simplifie** après chaque dérivation ; parfois, l'algèbre suffit à conclure.
- Les formes $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 se **transforment** d'abord en quotient.
- Pour les formes puissances, la réponse est e^L.

Croissances comparées

À l'infini : $\ln x \ll x^p \ll e^x$

Réponses – exercices A (1 à 4)

1. Forme $\frac{0}{0}$. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{3x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{5x^2}{3}=\boxed{\frac{5}{3}}$

2. Forme $\frac{0}{0}$. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$ (forme $\frac{0}{0}$) $\displaystyle\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$

3. Forme $\frac{0}{0}$. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\ln(1+x)}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}3(1+x)\cos(3x)=\boxed{3}$

4. Forme $\frac{0}{0}$, trois applications :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\quad(\text{forme }\tfrac{0}{0})\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}\quad(\text{forme }\tfrac{0}{0})\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

Réponses – exercices A (5 à 8)

5. Forme $\frac{0}{0}$. Le dénominateur se dérive avec la règle du produit :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x\sin x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)}{\sin x+x\cos x}\quad(\text{forme }\tfrac{0}{0})\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(2x)}{2\cos x-x\sin x}=\frac{-4}{2}=\boxed{-2}$$

6. Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{4e^{2x}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{8e^{2x}}=\boxed{0}$$

7. Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\quad(\text{forme }\tfrac{\infty}{\infty})\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\boxed{0}$$

8. **Piège !** Substitution directe : $\dfrac{0+1}{0+1}=\boxed{1}$. Ce n'est pas une forme indéterminée.

Réponses – exercices B

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-2x^{1/2}\right) = \boxed{0}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{6x}{e^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{6}{e^x} = \boxed{0}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}$ (forme $\frac{0}{0}$) $\displaystyle\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} e^{1/x} = \boxed{1}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\tan x\right) = -1\cdot 0 = \boxed{0}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cot x}$ (forme $\frac{0}{0}$) $\displaystyle\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to (\pi/2)^-} \frac{-1}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to (\pi/2)^-} \sin^2 x = \boxed{1}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$ (forme $\frac{-\infty}{+\infty}$) $\displaystyle\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \boxed{0}$ (car $e^{-x}\to +\infty$)

Réponses – exercices C

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}$ (forme $\frac{0}{0}$) $\displaystyle\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

2. $\csc x - \cot x = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ (forme $\frac{0}{0}$). $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{0}$

3. Conjugué : $\sqrt{x^2+x}-x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}$

4. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1} = \dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$ (forme $\frac{0}{0}$)

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} \quad (\text{forme } \tfrac{0}{0}) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2+x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Réponses – exercices D

1. 1^∞. $\ln h(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{1+2x} = 2$, donc $\boxed{e^2}$.

2. 1^∞. $\ln h(x) = \dfrac{2\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot\frac{1}{1+3/x}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{1+\frac{3}{x}} = 6$, donc $\boxed{e^6}$.

3. 1^∞. $\ln h(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1/x}{1} = 1$, donc $\boxed{e}$.

4. 0^0. $\ln h(x) = \sin x \ln x \to 0$ (exercice B4), donc $\boxed{1}$.

5. 1^∞. $\ln h(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\tan x}{2x}$ (forme $\frac{0}{0}$) $\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sec^2 x}{2} = -\dfrac{1}{2}$, donc $\boxed{e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$.

6. ∞^0. $\ln h(x) = \dfrac{\ln(e^x+x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x+x}$ (forme $\frac{\infty}{\infty}$) $\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = 1$, donc $\boxed{e}$.

Réponses – exercices E (1 à 4)

1. $\frac{0}{0}$. $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x}{1}=\cos\pi=\boxed{-1}$

2. $\frac{0}{0}$, trois applications (la forme reste $\frac{0}{0}$ à chaque étape) :

$$\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=\boxed{2}$$

3. **Piège !** Forme $\dfrac{2}{0^+}$: pas indéterminée. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{e^x+1}{x}=\boxed{+\infty}$

4. $0\cdot(-\infty)$. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=\boxed{0}$

Réponses – exercices E (5 à 8)

5. $\infty \cdot 0$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$ (forme $\frac{0}{0}$) $\overset{\text{H}}{=} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$ (exemple 9)

6. $\infty - \infty$. $\displaystyle\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$ (forme $\frac{0}{0}$)

$\overset{\text{H}}{=} \displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{-x}{(1+x)\ln(1+x)+x}$ (forme $\frac{0}{0}$) $\overset{\text{H}}{=} \displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{-1}{\ln(1+x)+2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

7. 1^∞. $\ln h(x) = x\ln\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\ln x - \ln(x+1)}{\frac{1}{x}}$ (forme $\frac{0}{0}$)

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x}{x+1}\right) = -1, \quad \text{donc } \boxed{e^{-1}}$$

8. 0^0. $\ln h(x) = \dfrac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{H}}{=} \displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\cot x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} \left(-x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right) = 0$, donc $\boxed{1}$.