Chapitre 8 - Dérivée implicite et taux liés

Dériver une relation, relier des vitesses de variation

Mohamed Nouidha

Collège Sainte-Anne

Automne 2026

Plan

1. Courbes définies implicitement
2. La dérivée implicite
3. Taux liés
4. Synthèse

Objectifs

À la fin de ce chapitre, vous devriez être capable de :

1. reconnaître une courbe définie par une **relation** entre x et y ;
2. calculer $\frac{dy}{dx}$ par **dérivation implicite** ;
3. trouver l'équation d'une tangente et les points où elle est horizontale ou verticale ;
4. modéliser une situation où plusieurs quantités varient avec le temps ;
5. résoudre un problème de **taux liés** en suivant une méthode rigoureuse, avec les unités.

Explicite ou implicite ?

Deux façons de décrire une courbe

Explicite : y est donné directement en fonction de x.

$$y = x^2 + 1, \qquad y = \sin(2x)$$

Implicite : x et y sont liés par une **relation**.

$$x^2 + y^2 = 25, \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

Explicite ou implicite ?

Deux façons de décrire une courbe

Explicite : y est donné directement en fonction de x.

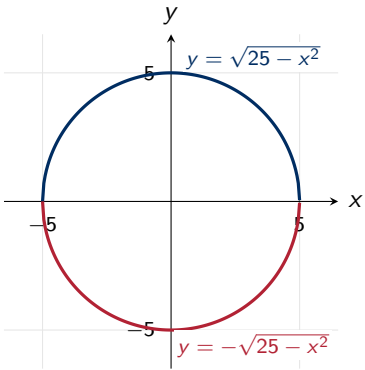
$$y = x^2 + 1, \qquad y = \sin(2x)$$

Implicite : x et y sont liés par une **relation**.

$$x^2 + y^2 = 25, \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

Le cercle $x^2 + y^2 = 25$ n'est pas le graphe d'**une** fonction : il en contient deux,

$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{25 - x^2}.$$



Quand on ne peut pas isoler y

La courbe $x^3 + y^3 = 6xy$ (le **folium de Descartes**) a une tangente bien définie en presque chaque point.

Quand on ne peut pas isoler y

La courbe $x^3 + y^3 = 6xy$ (le **folium de Descartes**) a une tangente bien définie en presque chaque point.

Mais il est **très difficile** d'isoler y dans cette équation.

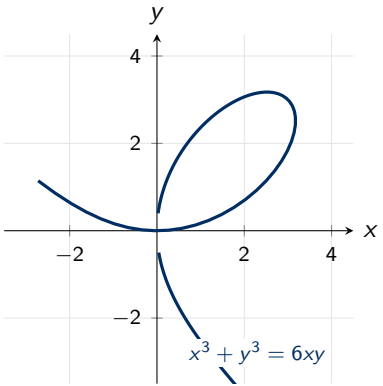
Quand on ne peut pas isoler y

La courbe $x^3 + y^3 = 6xy$ (le **folium de Descartes**) a une tangente bien définie en presque chaque point.

Mais il est **très difficile** d'isoler y dans cette équation.

Question du chapitre

Comment calculer la pente $\frac{dy}{dx}$ de la tangente **sans isoler** y ?



L'idée : y est une fonction de x

Sur un morceau de la courbe, y dépend de x : on peut penser $y = y(x)$, même si on ne connaît pas sa formule.

L'idée : y est une fonction de x

Sur un morceau de la courbe, y dépend de x : on peut penser $y = y(x)$, même si on ne connaît pas sa formule.

Pour dériver une expression contenant y, on applique donc la **règle de la chaîne** :

$$\frac{d}{dx}\left[y^2\right] = 2y \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \left(\text{comme } \frac{d}{dx}\left[g(x)^2\right] = 2g(x)\,g'(x)\right)$$

L'idée : y est une fonction de x

Sur un morceau de la courbe, y dépend de x : on peut penser $y = y(x)$, même si on ne connaît pas sa formule.

Pour dériver une expression contenant y, on applique donc la **règle de la chaîne** :

$$\frac{d}{dx}\left[y^2\right] = 2y \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \left(\text{comme } \frac{d}{dx}\left[g(x)^2\right] = 2g(x)\,g'(x)\right)$$

Expression	Dérivée par rapport à x	Expression	Dérivée par rapport à x
y	$\frac{dy}{dx}$	e^y	$e^y \frac{dy}{dx}$
y^3	$3y^2 \frac{dy}{dx}$	$\sin y$	$\cos y \frac{dy}{dx}$
x^2	$2x$ (aucun $\frac{dy}{dx}$)	xy	$1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}$ (produit)

Méthode

Méthode – dérivation implicite

1. **Dériver chaque membre** de l'équation par rapport à x.
2. Pour chaque terme contenant y, appliquer la **règle de la chaîne** : un facteur $\frac{dy}{dx}$ apparaît.
3. **Regrouper** tous les termes contenant $\frac{dy}{dx}$ d'un même côté.
4. **Isoler** $\frac{dy}{dx}$.

Méthode

Méthode – dérivation implicite

1. **Dériver chaque membre** de l'équation par rapport à x.
2. Pour chaque terme contenant y, appliquer la **règle de la chaîne** : un facteur $\frac{dy}{dx}$ apparaît.
3. **Regrouper** tous les termes contenant $\frac{dy}{dx}$ d'un même côté.
4. **Isoler** $\frac{dy}{dx}$.

Le résultat contient en général x **et** y : pour obtenir une pente, on remplace par les coordonnées d'un point de la courbe.

Méthode

Méthode – dérivation implicite

1. **Dériver chaque membre** de l'équation par rapport à x.
2. Pour chaque terme contenant y, appliquer la **règle de la chaîne** : un facteur $\frac{dy}{dx}$ apparaît.
3. **Regrouper** tous les termes contenant $\frac{dy}{dx}$ d'un même côté.
4. **Isoler** $\frac{dy}{dx}$.

Le résultat contient en général x **et** y : pour obtenir une pente, on remplace par les coordonnées d'un point de la courbe.

À vous !

Dériver par rapport à x : y^4, $\ln y$, $x^2 y$, $\cos(y^2)$.

Exemple 1 – le cercle

Exemple 1

Soit le cercle $x^2 + y^2 = 25$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis l'équation de la tangente au point $(3, 4)$.

Exemple 1 – le cercle

Exemple 1

Soit le cercle $x^2 + y^2 = 25$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis l'équation de la tangente au point $(3, 4)$.

On dérive chaque membre par rapport à x :

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Exemple 1 – le cercle

Exemple 1

Soit le cercle $x^2 + y^2 = 25$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis l'équation de la tangente au point $(3, 4)$.

On dérive chaque membre par rapport à x :

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Au point $(3, 4)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$.

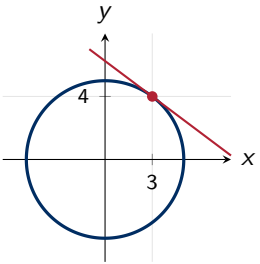
Exemple 1 – le cercle

Exemple 1

Soit le cercle $x^2 + y^2 = 25$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis l'équation de la tangente au point $(3, 4)$.

On dérive chaque membre par rapport à x :

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



Au point $(3, 4)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$.

Tangente : $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$, soit $\boxed{y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}$.

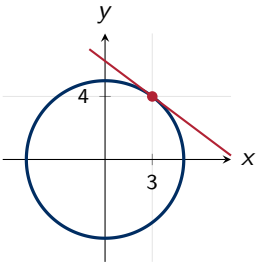
Exemple 1 – le cercle

Exemple 1

Soit le cercle $x^2 + y^2 = 25$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis l'équation de la tangente au point $(3, 4)$.

On dérive chaque membre par rapport à x :

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



Au point $(3, 4)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$.

Tangente : $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$, soit $\boxed{y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}$.

Vérification

Sur la moitié supérieure, $y = \sqrt{25 - x^2}$, donc $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{y}$: même résultat.

Exemple 2 – le folium de Descartes

Exemple 2

Soit $x^3 + y^3 = 6xy$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis l'équation de la tangente au point $(3, 3)$.

Exemple 2 – le folium de Descartes

Exemple 2

Soit $x^3 + y^3 = 6xy$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis l'équation de la tangente au point $(3, 3)$.

On dérive ; à droite, c'est un **produit** :

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6y + 6x \frac{dy}{dx}$$

Exemple 2 – le folium de Descartes

Exemple 2

Soit $x^3 + y^3 = 6xy$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis l'équation de la tangente au point $(3, 3)$.

On dérive ; à droite, c'est un **produit** :

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6y + 6x \frac{dy}{dx}$$

On regroupe les termes en $\frac{dy}{dx}$, puis on isole :

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2 - 6x\right) = 6y - 3x^2 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

Exemple 2 – le folium de Descartes

Exemple 2

Soit $x^3 + y^3 = 6xy$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis l'équation de la tangente au point $(3, 3)$.

On dérive ; à droite, c'est un **produit** :

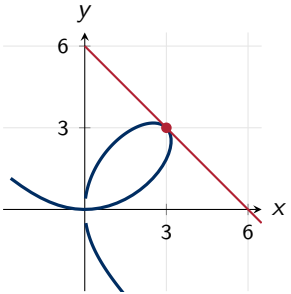
$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6y + 6x \frac{dy}{dx}$$

On regroupe les termes en $\frac{dy}{dx}$, puis on isole :

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2 - 6x\right) = 6y - 3x^2 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

En $(3, 3)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{6-9}{9-6} = -1$. Tangente :

$\boxed{y = -x + 6}$.



Exemple 3 – avec l'exponentielle

Exemple 3

Soit $e^y + xy = e$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis la pente de la tangente au point $(0, 1)$.

Exemple 3 – avec l'exponentielle

Exemple 3

Soit $e^y + xy = e$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis la pente de la tangente au point $(0, 1)$.

On vérifie d'abord que $(0, 1)$ est sur la courbe : $e^1 + 0 \cdot 1 = e$.

Exemple 3 – avec l'exponentielle

Exemple 3

Soit $e^y + xy = e$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis la pente de la tangente au point $(0, 1)$.

On vérifie d'abord que $(0, 1)$ est sur la courbe : $e^1 + 0 \cdot 1 = e$.

On dérive chaque membre (e est une constante, sa dérivée est nulle) :

$$e^y \frac{dy}{dx} + \left(1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Exemple 3 – avec l'exponentielle

Exemple 3

Soit $e^y + xy = e$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis la pente de la tangente au point $(0, 1)$.

On vérifie d'abord que $(0, 1)$ est sur la courbe : $e^1 + 0 \cdot 1 = e$.

On dérive chaque membre (e est une constante, sa dérivée est nulle) :

$$e^y \frac{dy}{dx} + \left(1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(e^y + x) = -y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{e^y + x}$$

Exemple 3 – avec l'exponentielle

Exemple 3

Soit $e^y + xy = e$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, puis la pente de la tangente au point $(0,1)$.

On vérifie d'abord que $(0,1)$ est sur la courbe : $e^1 + 0 \cdot 1 = e$.

On dérive chaque membre (e est une constante, sa dérivée est nulle) :

$$e^y \frac{dy}{dx} + \left(1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(e^y + x) = -y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{e^y + x}$$

En $(0,1)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{e^1 + 0} = \boxed{-\frac{1}{e}}$.

Exemple 4 – tangentes horizontales et verticales

Exemple 4

Trouver les points de la courbe $x^2 - xy + y^2 = 3$ où la tangente est horizontale, puis verticale.

Exemple 4 – tangentes horizontales et verticales

Exemple 4

Trouver les points de la courbe $x^2 - xy + y^2 = 3$ où la tangente est horizontale, puis verticale.

$$2x - \left(y + x\,\frac{dy}{dx}\right) + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Exemple 4 – tangentes horizontales et verticales

Exemple 4

Trouver les points de la courbe $x^2 - xy + y^2 = 3$ où la tangente est horizontale, puis verticale.

$$2x - \left(y + x\,\frac{dy}{dx}\right) + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Horizontale : numérateur nul, $y = 2x$. Dans l'équation : $x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3$, donc $x = \pm 1$: $(1, 2)$ et $(-1, -2)$.

Exemple 4 – tangentes horizontales et verticales

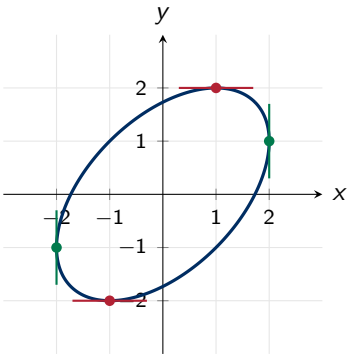
Exemple 4

Trouver les points de la courbe $x^2 - xy + y^2 = 3$ où la tangente est horizontale, puis verticale.

$$2x - \left(y + x\,\frac{dy}{dx}\right) + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Horizontale : numérateur nul, $y = 2x$. Dans l'équation : $x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3$, donc $x = \pm 1$: $(1, 2)$ et $(-1, -2)$.

Verticale : dénominateur nul, $x = 2y$. Dans l'équation : $4y^2 - 2y^2 + y^2 = 3$, donc $y = \pm 1$: $(2, 1)$ et $(-2, -1)$.



Erreurs fréquentes

Erreurs à éviter

- **Oublier le facteur $\frac{dy}{dx}$:** $\frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2$ faux ; $\frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2 \frac{dy}{dx}$.
- **Oublier la règle du produit :** $\frac{d}{dx}[xy] = \frac{dy}{dx}$ faux ; $\frac{d}{dx}[xy] = y + x \frac{dy}{dx}$.
- **Mal dériver une constante :** dans $x^2 + y^2 = 25$, le membre de droite donne 0, pas 25.
- **Utiliser un point qui n'est pas sur la courbe :** toujours vérifier que le point satisfait l'équation.

Erreurs fréquentes

Erreurs à éviter

- **Oublier le facteur $\frac{dy}{dx}$:** $\frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2$ faux ; $\frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2 \frac{dy}{dx}$.
- **Oublier la règle du produit :** $\frac{d}{dx}[xy] = \frac{dy}{dx}$ faux ; $\frac{d}{dx}[xy] = y + x \frac{dy}{dx}$.
- **Mal dériver une constante :** dans $x^2 + y^2 = 25$, le membre de droite donne 0, pas 25.
- **Utiliser un point qui n'est pas sur la courbe :** toujours vérifier que le point satisfait l'équation.

À vous !

Soit $x^2 + 3xy + y^2 = 5$. Vérifier que $(1, 1)$ est sur la courbe, puis calculer la pente de la tangente en ce point.

Exercices A – dérivée implicite

Calculer $\frac{dy}{dx}$ par dérivation implicite :

1. $x^2 + 4y^2 = 4$
2. $y^3 + x^2 y = 10$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
4. $e^{xy} = x + y$
5. $y \sin x = x \cos y$
6. $\ln y + xy = 1$
7. Trouver l'équation de la tangente à la courbe $x^2 + xy + y^2 = 7$ au point $(1, 2)$.
8. Trouver les points du cercle $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ où la tangente est horizontale.
9. Trouver l'équation de la tangente à la courbe $y^2 = x^3$ au point $(4, 8)$.
10. Montrer que la tangente au cercle $x^2 + y^2 = r^2$ en un point (a, b), avec $b \neq 0$, est perpendiculaire au rayon qui joint l'origine à ce point.

Des quantités qui varient en même temps

On gonfle un ballon sphérique. Son rayon r et son volume V augmentent **avec le temps** t : ce sont des fonctions $r(t)$ et $V(t)$.

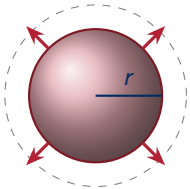
Des quantités qui varient en même temps

On gonfle un ballon sphérique. Son rayon r et son volume V augmentent **avec le temps** t : ce sont des fonctions $r(t)$ et $V(t)$.

À chaque instant, ils sont liés par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Des quantités qui varient en même temps

On gonfle un ballon sphérique. Son rayon r et son volume V augmentent **avec le temps** t : ce sont des fonctions $r(t)$ et $V(t)$.



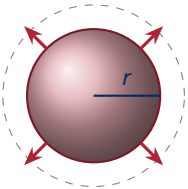
À chaque instant, ils sont liés par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

On dérive par rapport à t, avec la règle de la chaîne :

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Des quantités qui varient en même temps

On gonfle un ballon sphérique. Son rayon r et son volume V augmentent **avec le temps** t : ce sont des fonctions $r(t)$ et $V(t)$.



À chaque instant, ils sont liés par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

On dérive par rapport à t, avec la règle de la chaîne :

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

À retenir

Les **taux de variation** $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{dr}{dt}$ sont liés : ce sont des **taux liés**. C'est la même idée que la dérivée implicite : on dérive une **relation**, mais cette fois par rapport au **temps** t.

Méthode

Méthode – problème de taux liés

1. **Faire un schéma** de la situation à un instant quelconque.
2. **Nommer les variables** qui dépendent du temps ; repérer les constantes.
3. **Traduire** les données et la question en dérivées par rapport à t, avec les unités.
4. **Écrire une relation** entre les variables (Pythagore, aire, volume, triangles semblables, trigonométrie).
5. **Dériver** la relation par rapport à t.
6. **Substituer** les valeurs à l'instant demandé, isoler le taux cherché et **conclure par une phrase**, avec les unités.

Méthode

Méthode – problème de taux liés

1. **Faire un schéma** de la situation à un instant quelconque.
2. **Nommer les variables** qui dépendent du temps ; repérer les constantes.
3. **Traduire** les données et la question en dérivées par rapport à t, avec les unités.
4. **Écrire une relation** entre les variables (Pythagore, aire, volume, triangles semblables, trigonométrie).
5. **Dériver** la relation par rapport à t.
6. **Substituer** les valeurs à l'instant demandé, isoler le taux cherché et **conclure par une phrase**, avec les unités.

Erreur la plus fréquente

Ne **jamais** remplacer une quantité qui varie par sa valeur **avant** de dériver : sa dérivée deviendrait nulle. Les valeurs numériques ne s'utilisent qu'à l'étape 6.

Traduire l'énoncé en dérivées

Énoncé	**Traduction**
le volume augmente de 100 cm^3/s	$\frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$
le niveau d'eau baisse de 2 cm/min	$\frac{dh}{dt} = -2\ \text{cm/min}$
la voiture s'approche de l'intersection à 50 km/h	$\frac{dx}{dt} = -50\ \text{km/h}$
à quelle vitesse l'aire change-t-elle...?	on cherche $\frac{dA}{dt}$

Traduire l'énoncé en dérivées

Énoncé	**Traduction**
le volume augmente de 100 cm^3/s	$\frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$
le niveau d'eau baisse de 2 cm/min	$\frac{dh}{dt} = -2\ \text{cm/min}$
la voiture s'approche de l'intersection à 50 km/h	$\frac{dx}{dt} = -50\ \text{km/h}$
à quelle vitesse l'aire change-t-elle...?	on cherche $\frac{dA}{dt}$

Le signe a un sens

Une quantité qui **augmente** a une dérivée **positive** ; une quantité qui **diminue** a une dérivée **négative**.

Exemple 5 – le ballon

Exemple 5

On gonfle un ballon sphérique à raison de 100 cm^3/s. À quelle vitesse son rayon augmente-t-il lorsque $r = 25$ cm ?

Exemple 5 – le ballon

Exemple 5

On gonfle un ballon sphérique à raison de 100 cm^3/s. À quelle vitesse son rayon augmente-t-il lorsque $r = 25$ cm ?

Variables. $r(t)$: rayon (cm), $V(t)$: volume (cm^3), t en secondes.

Exemple 5 – le ballon

Exemple 5

On gonfle un ballon sphérique à raison de 100 cm^3/s. À quelle vitesse son rayon augmente-t-il lorsque $r = 25$ cm ?

Variables. $r(t)$: rayon (cm), $V(t)$: volume (cm^3), t en secondes.
Données. $\frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$. **On cherche** $\frac{dr}{dt}$ lorsque $r = 25$.

Exemple 5 – le ballon

Exemple 5

On gonfle un ballon sphérique à raison de 100 cm^3/s. À quelle vitesse son rayon augmente-t-il lorsque $r = 25$ cm ?

Variables. $r(t)$: rayon (cm), $V(t)$: volume (cm^3), t en secondes.
Données. $\frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$. **On cherche** $\frac{dr}{dt}$ lorsque $r = 25$.

Relation. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Exemple 5 – le ballon

Exemple 5

On gonfle un ballon sphérique à raison de 100 cm^3/s. À quelle vitesse son rayon augmente-t-il lorsque $r = 25$ cm ?

Variables. $r(t)$: rayon (cm), $V(t)$: volume (cm^3), t en secondes.
Données. $\frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$. **On cherche** $\frac{dr}{dt}$ lorsque $r = 25$.

Relation. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Dérivée. $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

Exemple 5 – le ballon

Exemple 5

On gonfle un ballon sphérique à raison de 100 cm^3/s. À quelle vitesse son rayon augmente-t-il lorsque $r = 25$ cm ?

Variables. $r(t)$: rayon (cm), $V(t)$: volume (cm^3), t en secondes.
Données. $\frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$. **On cherche** $\frac{dr}{dt}$ lorsque $r = 25$.

Relation. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Dérivée. $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

Substitution.

$$100 = 4\pi(25)^2 \frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{100}{2500\pi} = \frac{1}{25\pi} \approx 0{,}0127\ \text{cm/s}$$

Exemple 5 – le ballon

Exemple 5

On gonfle un ballon sphérique à raison de 100 cm^3/s. À quelle vitesse son rayon augmente-t-il lorsque $r = 25$ cm ?

Variables. $r(t)$: rayon (cm), $V(t)$: volume (cm^3), t en secondes.
Données. $\frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$. **On cherche** $\frac{dr}{dt}$ lorsque $r = 25$.

Relation. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Dérivée. $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

Substitution.

$$100 = 4\pi(25)^2 \frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{100}{2500\pi} = \frac{1}{25\pi} \approx 0{,}0127\ \text{cm/s}$$

Conclusion. Lorsque $r = 25$ cm, le rayon augmente à environ 0,013 cm/s.

Exemple 6 – l'échelle qui glisse

Exemple 6

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Le bas de l'échelle s'éloigne du mur à 1 m/s. À quelle vitesse le haut glisse-t-il lorsque le bas est à 3 m du mur ?

Exemple 6 – l'échelle qui glisse

Exemple 6

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Le bas de l'échelle s'éloigne du mur à 1 m/s. À quelle vitesse le haut glisse-t-il lorsque le bas est à 3 m du mur ?

Variables. x : distance pied–mur, y : hauteur du haut (m).

Exemple 6 – l'échelle qui glisse

Exemple 6

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Le bas de l'échelle s'éloigne du mur à 1 m/s. À quelle vitesse le haut glisse-t-il lorsque le bas est à 3 m du mur ?

Variables. x : distance pied–mur, y : hauteur du haut (m).

Données. $\frac{dx}{dt} = 1$ m/s. **On cherche** $\frac{dy}{dt}$ lorsque $x = 3$.

Exemple 6 – l'échelle qui glisse

Exemple 6

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Le bas de l'échelle s'éloigne du mur à 1 m/s. À quelle vitesse le haut glisse-t-il lorsque le bas est à 3 m du mur ?

Variables. x : distance pied–mur, y : hauteur du haut (m).

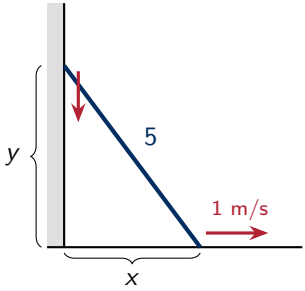
Données. $\frac{dx}{dt} = 1$ m/s. **On cherche** $\frac{dy}{dt}$ lorsque $x = 3$.

Relation. $x^2 + y^2 = 25$ (Pythagore).

Exemple 6 – l'échelle qui glisse

Exemple 6

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Le bas de l'échelle s'éloigne du mur à 1 m/s. À quelle vitesse le haut glisse-t-il lorsque le bas est à 3 m du mur ?



Variables. x : distance pied–mur, y : hauteur du haut (m).

Données. $\frac{dx}{dt} = 1$ m/s. **On cherche** $\frac{dy}{dt}$ lorsque $x = 3$.

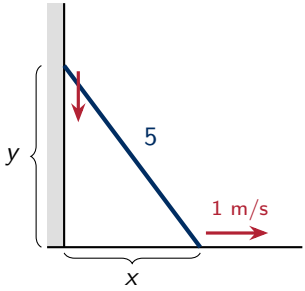
Relation. $x^2 + y^2 = 25$ (Pythagore).

Dérivée. $2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0$.

Exemple 6 – l'échelle qui glisse

Exemple 6

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Le bas de l'échelle s'éloigne du mur à 1 m/s. À quelle vitesse le haut glisse-t-il lorsque le bas est à 3 m du mur ?



Variables. x : distance pied–mur, y : hauteur du haut (m).

Données. $\frac{dx}{dt} = 1$ m/s. **On cherche** $\frac{dy}{dt}$ lorsque $x = 3$.

Relation. $x^2 + y^2 = 25$ (Pythagore).

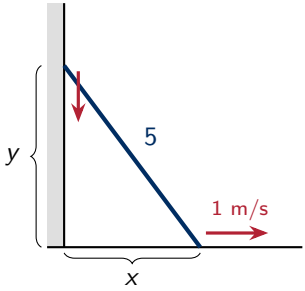
Dérivée. $2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0$.

Substitution. Si $x = 3$, alors $y = \sqrt{25 - 9} = 4$. Donc $2(3)(1) + 2(4)\,\frac{dy}{dt} = 0$, d'où $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}$ m/s.

Exemple 6 – l'échelle qui glisse

Exemple 6

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Le bas de l'échelle s'éloigne du mur à 1 m/s. À quelle vitesse le haut glisse-t-il lorsque le bas est à 3 m du mur ?



Variables. x : distance pied–mur, y : hauteur du haut (m).

Données. $\frac{dx}{dt} = 1$ m/s. **On cherche** $\frac{dy}{dt}$ lorsque $x = 3$.

Relation. $x^2 + y^2 = 25$ (Pythagore).

Dérivée. $2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0$.

Substitution. Si $x = 3$, alors $y = \sqrt{25 - 9} = 4$. Donc $2(3)(1) + 2(4)\,\frac{dy}{dt} = 0$, d'où $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}$ m/s.

Conclusion. Le haut de l'échelle descend à 0,75 m/s (signe négatif : y diminue).

Exemple 7 – le réservoir conique

Exemple 7

Un réservoir en forme de cône renversé a une hauteur de 6 m et un rayon de 3 m au sommet. On le remplit à raison de 2 m^3/min. À quelle vitesse le niveau monte-t-il lorsque l'eau a 4 m de profondeur ?

Exemple 7 – le réservoir conique

Exemple 7

Un réservoir en forme de cône renversé a une hauteur de 6 m et un rayon de 3 m au sommet. On le remplit à raison de 2 m^3/min. À quelle vitesse le niveau monte-t-il lorsque l'eau a 4 m de profondeur ?

Variables. h : hauteur d'eau, r : rayon de la surface, V : volume.

Exemple 7 – le réservoir conique

Exemple 7

Un réservoir en forme de cône renversé a une hauteur de 6 m et un rayon de 3 m au sommet. On le remplit à raison de 2 m^3/min. À quelle vitesse le niveau monte-t-il lorsque l'eau a 4 m de profondeur ?

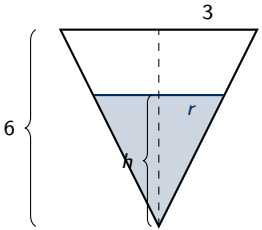
Variables. h : hauteur d'eau, r : rayon de la surface, V : volume.

Données. $\frac{dV}{dt} = 2\ \text{m}^3/\text{min}$. **On cherche** $\frac{dh}{dt}$ lorsque $h = 4$.

Exemple 7 – le réservoir conique

Exemple 7

Un réservoir en forme de cône renversé a une hauteur de 6 m et un rayon de 3 m au sommet. On le remplit à raison de 2 m^3/min. À quelle vitesse le niveau monte-t-il lorsque l'eau a 4 m de profondeur ?



Variables. h : hauteur d'eau, r : rayon de la surface, V : volume.

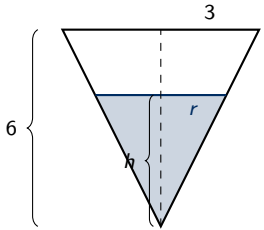
Données. $\frac{dV}{dt} = 2\ \text{m}^3/\text{min}$. **On cherche** $\frac{dh}{dt}$ lorsque $h = 4$.

Relation. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$: trois variables, il faut éliminer r.

Exemple 7 – le réservoir conique

Exemple 7

Un réservoir en forme de cône renversé a une hauteur de 6 m et un rayon de 3 m au sommet. On le remplit à raison de 2 m^3/min. À quelle vitesse le niveau monte-t-il lorsque l'eau a 4 m de profondeur ?



Variables. h : hauteur d'eau, r : rayon de la surface, V : volume.

Données. $\frac{dV}{dt} = 2\ \text{m}^3/\text{min}$. **On cherche** $\frac{dh}{dt}$ lorsque $h = 4$.

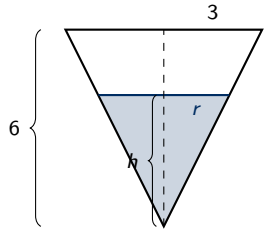
Relation. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$: trois variables, il faut éliminer r.

Triangles semblables. $\frac{r}{h} = \frac{3}{6}$, donc $r = \frac{h}{2}$ et $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$.

Exemple 7 – le réservoir conique

Exemple 7

Un réservoir en forme de cône renversé a une hauteur de 6 m et un rayon de 3 m au sommet. On le remplit à raison de 2 m^3/min. À quelle vitesse le niveau monte-t-il lorsque l'eau a 4 m de profondeur ?



Variables. h : hauteur d'eau, r : rayon de la surface, V : volume.

Données. $\frac{dV}{dt} = 2\ \text{m}^3/\text{min}$. **On cherche** $\frac{dh}{dt}$ lorsque $h = 4$.

Relation. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$: trois variables, il faut éliminer r.

Triangles semblables. $\frac{r}{h} = \frac{3}{6}$, donc $r = \frac{h}{2}$ et $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$.

Dérivée et substitution. $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$, donc $2 = \frac{\pi(16)}{4}\frac{dh}{dt}$ et $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}159\ \text{m/min}$.

Exemple 8 – deux voitures

Exemple 8

Deux voitures roulent vers la même intersection : A vers l'ouest à 50 km/h, B vers le sud à 60 km/h. À quelle vitesse la distance qui les sépare change-t-elle lorsque A est à 0,3 km et B à 0,4 km de l'intersection ?

Exemple 8 – deux voitures

Exemple 8

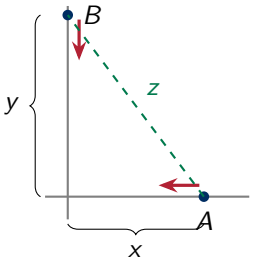
Deux voitures roulent vers la même intersection : A vers l'ouest à 50 km/h, B vers le sud à 60 km/h. À quelle vitesse la distance qui les sépare change-t-elle lorsque A est à 0,3 km et B à 0,4 km de l'intersection ?

Variables. x : distance de A, y : distance de B, z : distance AB (km).

Exemple 8 – deux voitures

Exemple 8

Deux voitures roulent vers la même intersection : A vers l'ouest à 50 km/h, B vers le sud à 60 km/h. À quelle vitesse la distance qui les sépare change-t-elle lorsque A est à 0,3 km et B à 0,4 km de l'intersection ?



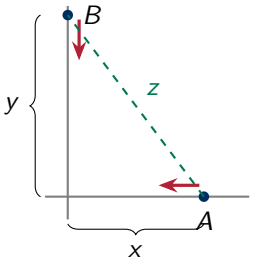
Variables. x : distance de A, y : distance de B, z : distance AB (km).

Données. $\frac{dx}{dt} = -50$, $\frac{dy}{dt} = -60$ km/h (les distances **diminuent**).

Exemple 8 – deux voitures

Exemple 8

Deux voitures roulent vers la même intersection : A vers l'ouest à 50 km/h, B vers le sud à 60 km/h. À quelle vitesse la distance qui les sépare change-t-elle lorsque A est à 0,3 km et B à 0,4 km de l'intersection ?



Variables. x : distance de A, y : distance de B, z : distance AB (km).

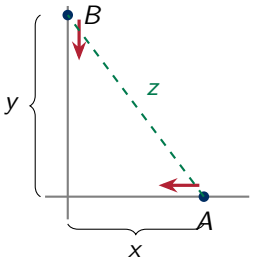
Données. $\frac{dx}{dt} = -50$, $\frac{dy}{dt} = -60$ km/h (les distances **diminuent**).

Relation. $z^2 = x^2 + y^2$. **Dérivée.** $2z\,\frac{dz}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}$.

Exemple 8 – deux voitures

Exemple 8

Deux voitures roulent vers la même intersection : A vers l'ouest à 50 km/h, B vers le sud à 60 km/h. À quelle vitesse la distance qui les sépare change-t-elle lorsque A est à 0,3 km et B à 0,4 km de l'intersection ?



Variables. x : distance de A, y : distance de B, z : distance AB (km).

Données. $\frac{dx}{dt} = -50$, $\frac{dy}{dt} = -60$ km/h (les distances **diminuent**).

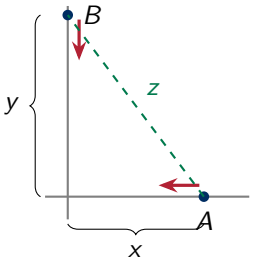
Relation. $z^2 = x^2 + y^2$. **Dérivée.** $2z\,\frac{dz}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}$.

Substitution. $z = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2} = 0{,}5$, donc $\frac{dz}{dt} = \frac{0{,}3(-50) + 0{,}4(-60)}{0{,}5} = -78$ km/h.

Exemple 8 – deux voitures

Exemple 8

Deux voitures roulent vers la même intersection : A vers l'ouest à 50 km/h, B vers le sud à 60 km/h. À quelle vitesse la distance qui les sépare change-t-elle lorsque A est à 0,3 km et B à 0,4 km de l'intersection ?



Variables. x : distance de A, y : distance de B, z : distance AB (km).

Données. $\frac{dx}{dt} = -50$, $\frac{dy}{dt} = -60$ km/h (les distances **diminuent**).

Relation. $z^2 = x^2 + y^2$. **Dérivée.** $2z\,\frac{dz}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}$.

Substitution. $z = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2} = 0{,}5$, donc $\frac{dz}{dt} = \frac{0{,}3(-50) + 0{,}4(-60)}{0{,}5} = -78$ km/h.

Conclusion. La distance entre les voitures diminue à 78 km/h.

Exemple 9 – un angle qui varie

Exemple 9

Une montgolfière s'élève verticalement à 2 m/s ; un observateur est à 100 m du point de décollage. À quelle vitesse l'angle d'élévation θ augmente-t-il lorsque l'altitude est de 100 m ?

Exemple 9 – un angle qui varie

Exemple 9

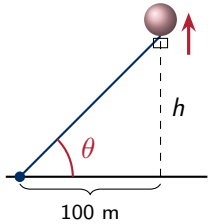
Une montgolfière s'élève verticalement à 2 m/s ; un observateur est à 100 m du point de décollage. À quelle vitesse l'angle d'élévation θ augmente-t-il lorsque l'altitude est de 100 m ?

Variables. h : altitude (m), θ : angle (rad). **Données.** $\frac{dh}{dt} = 2$ m/s.

Exemple 9 – un angle qui varie

Exemple 9

Une montgolfière s'élève verticalement à 2 m/s ; un observateur est à 100 m du point de décollage. À quelle vitesse l'angle d'élévation θ augmente-t-il lorsque l'altitude est de 100 m ?



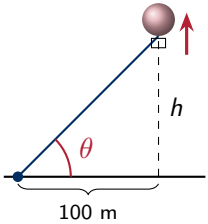
Variables. h : altitude (m), θ : angle (rad). **Données.** $\frac{dh}{dt} = 2$ m/s.

Relation. $\tan\theta = \dfrac{h}{100}$.

Exemple 9 – un angle qui varie

Exemple 9

Une montgolfière s'élève verticalement à 2 m/s ; un observateur est à 100 m du point de décollage. À quelle vitesse l'angle d'élévation θ augmente-t-il lorsque l'altitude est de 100 m ?



Variables. h : altitude (m), θ : angle (rad). **Données.** $\frac{dh}{dt} = 2$ m/s.

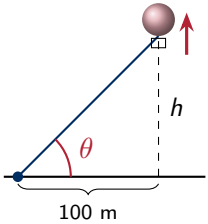
Relation. $\tan\theta = \dfrac{h}{100}$.

Dérivée. $\sec^2\theta \, \frac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{100} \, \frac{dh}{dt}$.

Exemple 9 – un angle qui varie

Exemple 9

Une montgolfière s'élève verticalement à 2 m/s ; un observateur est à 100 m du point de décollage. À quelle vitesse l'angle d'élévation θ augmente-t-il lorsque l'altitude est de 100 m ?



Variables. h : altitude (m), θ : angle (rad). **Données.** $\frac{dh}{dt} = 2$ m/s.

Relation. $\tan\theta = \dfrac{h}{100}$.

Dérivée. $\sec^2\theta \, \frac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{100} \, \frac{dh}{dt}$.

Substitution. Si $h = 100$, alors $\tan\theta = 1$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et $\sec^2\theta = 2$: $\quad 2\,\frac{d\theta}{dt} = \dfrac{2}{100}$, d'où $\frac{d\theta}{dt} = 0{,}01$ rad/s.

Exemple 10 – l'ombre sous le lampadaire

Exemple 10

Un lampadaire mesure 6 m. Une personne de 1,8 m s'en éloigne à 1,5 m/s. À quelle vitesse la longueur de son ombre augmente-t-elle ?

Exemple 10 – l'ombre sous le lampadaire

Exemple 10

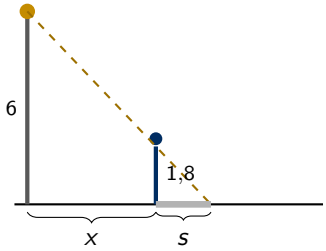
Un lampadaire mesure 6 m. Une personne de 1,8 m s'en éloigne à 1,5 m/s. À quelle vitesse la longueur de son ombre augmente-t-elle ?

Variables. x : distance lampadaire–personne, s : longueur de l'ombre (m).

Exemple 10 – l'ombre sous le lampadaire

Exemple 10

Un lampadaire mesure 6 m. Une personne de 1,8 m s'en éloigne à 1,5 m/s. À quelle vitesse la longueur de son ombre augmente-t-elle ?

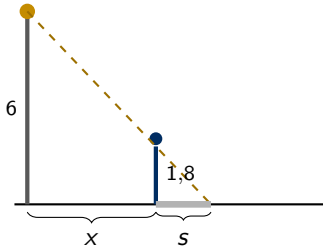


Variables. x : distance lampadaire–personne, s : longueur de l'ombre (m).
Données. $\frac{dx}{dt} = 1{,}5$ m/s. **On cherche** $\frac{ds}{dt}$.

Exemple 10 – l'ombre sous le lampadaire

Exemple 10

Un lampadaire mesure 6 m. Une personne de 1,8 m s'en éloigne à 1,5 m/s. À quelle vitesse la longueur de son ombre augmente-t-elle ?



Variables. x : distance lampadaire–personne, s : longueur de l'ombre (m).

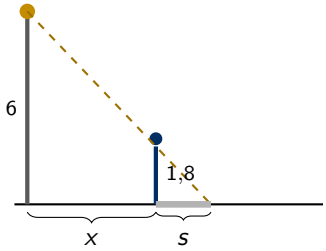
Données. $\frac{dx}{dt} = 1{,}5$ m/s. **On cherche** $\frac{ds}{dt}$.

Relation (triangles semblables). $\dfrac{s}{1{,}8} = \dfrac{x+s}{6}$, donc $6s = 1{,}8x + 1{,}8s$, soit $s = \dfrac{3}{7}x$.

Exemple 10 – l'ombre sous le lampadaire

Exemple 10

Un lampadaire mesure 6 m. Une personne de 1,8 m s'en éloigne à 1,5 m/s. À quelle vitesse la longueur de son ombre augmente-t-elle ?



Variables. x : distance lampadaire–personne, s : longueur de l'ombre (m).

Données. $\frac{dx}{dt} = 1{,}5$ m/s. **On cherche** $\frac{ds}{dt}$.

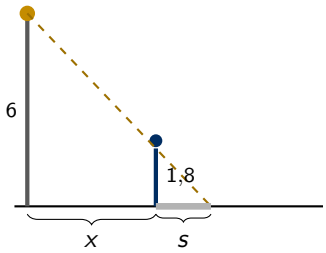
Relation (triangles semblables). $\dfrac{s}{1{,}8} = \dfrac{x+s}{6}$, donc $6s = 1{,}8x + 1{,}8s$, soit $s = \dfrac{3}{7}x$.

Dérivée. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3}{7}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{7}(1{,}5) = \dfrac{9}{14} \approx 0{,}64$ m/s.

Exemple 10 – l'ombre sous le lampadaire

Exemple 10

Un lampadaire mesure 6 m. Une personne de 1,8 m s'en éloigne à 1,5 m/s. À quelle vitesse la longueur de son ombre augmente-t-elle ?



Variables. x : distance lampadaire–personne, s : longueur de l'ombre (m).

Données. $\frac{dx}{dt} = 1{,}5$ m/s. **On cherche** $\frac{ds}{dt}$.

Relation (triangles semblables). $\dfrac{s}{1{,}8} = \dfrac{x+s}{6}$, donc $6s = 1{,}8x + 1{,}8s$, soit $s = \dfrac{3}{7}x$.

Dérivée. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3}{7}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{7}(1{,}5) = \dfrac{9}{14} \approx 0{,}64$ m/s.

Conclusion. L'ombre s'allonge à environ 0,64 m/s, quelle que soit la position de la personne.

Bien rédiger une solution

Solution incorrecte

Échelle de l'exemple 6. Quand $x = 3$, $y = 4$:

$$3^2 + 4^2 = 25$$

On dérive : $0 + 0 = 0$.

On a substitué avant de dériver : toute l'information sur les vitesses est perdue.

Solution correcte

Relation à un instant **quelconque** :

$$x^2 + y^2 = 25$$

On dérive : $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$.

Ensuite seulement, on substitue $x = 3$, $y = 4$, $\frac{dx}{dt} = 1$.

Bien rédiger une solution

Solution incorrecte

Échelle de l'exemple 6. Quand $x = 3$, $y = 4$:

$$3^2 + 4^2 = 25$$

On dérive : $0 + 0 = 0$.

On a substitué avant de dériver : toute l'information sur les vitesses est perdue.

Solution correcte

Relation à un instant **quelconque** :

$$x^2 + y^2 = 25$$

On dérive : $2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0$.

Ensuite seulement, on substitue $x = 3$, $y = 4$, $\frac{dx}{dt} = 1$.

Une solution complète contient

les variables nommées avec leurs unités, les données traduites en dérivées, la relation, sa dérivée, la substitution, et une **phrase de conclusion** avec unités.

Exercices B – taux liés (1 à 5)

Pour chaque problème, faire un schéma et suivre les six étapes de la méthode.

1. Le rayon d'une tache d'huile circulaire augmente à 2 cm/s. À quelle vitesse son aire augmente-t-elle lorsque le rayon vaut 10 cm ?
2. L'arête d'un cube augmente à 3 cm/s. À quelle vitesse son volume augmente-t-il lorsque l'arête mesure 10 cm ?
3. La longueur d'un rectangle augmente à 2 cm/s et sa largeur diminue à 3 cm/s. À quelle vitesse son aire change-t-elle lorsque la longueur vaut 20 cm et la largeur 10 cm ?
4. Une échelle de 10 m est appuyée contre un mur. Le haut glisse vers le bas à 0,5 m/s. À quelle vitesse le bas s'éloigne-t-il du mur lorsque le haut est à 6 m du sol ?
5. Le volume d'une sphère diminue à 50 cm^3/s. À quelle vitesse l'aire de sa surface ($S = 4\pi r^2$) change-t-elle lorsque le rayon vaut 5 cm ?

Exercices B – taux liés (6 à 10)

6. Un réservoir en forme de cône renversé a une hauteur de 10 m et un rayon de 4 m au sommet. L'eau y entre à 3 m^3/min. À quelle vitesse le niveau monte-t-il lorsque l'eau a 5 m de profondeur ?
7. Deux navires quittent le même port en même temps : l'un vers l'est à 30 km/h, l'autre vers le nord à 40 km/h. À quelle vitesse la distance entre eux augmente-t-elle après 2 h ?
8. Une personne de 1,6 m s'éloigne à 1,2 m/s d'un lampadaire de 5 m. À quelle vitesse son ombre s'allonge-t-elle ?
9. Un avion vole horizontalement à 3 km d'altitude, à 600 km/h, et passe directement au-dessus d'une station radar. À quelle vitesse la distance avion–radar augmente-t-elle lorsqu'elle vaut 5 km ?
10. Une échelle de 5 m glisse : son pied s'éloigne du mur à 0,5 m/s. À quelle vitesse l'angle θ entre l'échelle et le sol change-t-il lorsque le pied est à 3 m du mur ?

Récapitulatif

Dérivée implicite

- On dérive les deux membres par rapport à x.
- Chaque terme en y produit un facteur $\frac{dy}{dx}$.
- On regroupe, puis on isole $\frac{dy}{dx}$.
- Pente en un point : on remplace x **et** y.

Taux liés

- Schéma, variables, données en dérivées.
- Relation entre les variables.
- On dérive par rapport à t.
- On substitue **après** avoir dérivé.
- Phrase de conclusion avec unités.

Récapitulatif

Dérivée implicite

- On dérive les deux membres par rapport à x.
- Chaque terme en y produit un facteur $\frac{dy}{dx}$.
- On regroupe, puis on isole $\frac{dy}{dx}$.
- Pente en un point : on remplace x **et** y.

Taux liés

- Schéma, variables, données en dérivées.
- Relation entre les variables.
- On dérive par rapport à t.
- On substitue **après** avoir dérivé.
- Phrase de conclusion avec unités.

Relations utiles

Pythagore : $x^2 + y^2 = z^2$ Cercle : $A = \pi r^2$ Sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$

Cône : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Triangles semblables : rapports égaux Trigonométrie : $\tan\theta = \frac{\text{opp.}}{\text{adj.}}$

Exercices C – synthèse

1. Un point se déplace sur le cercle $x^2 + y^2 = 25$. Lorsqu'il passe par $(3, 4)$, son abscisse augmente à 3 unités/s. À quelle vitesse son ordonnée change-t-elle ?
2. Du sable tombe à 10 m^3/min et forme un tas conique dont la hauteur est toujours égale au diamètre de la base. À quelle vitesse la hauteur augmente-t-elle lorsque le tas mesure 5 m de haut ?
3. Un cerf-volant vole à 30 m d'altitude ; le vent l'éloigne horizontalement à 2 m/s. À quelle vitesse faut-il dérouler la corde lorsque 50 m de corde sont déroulés ?
4. Soit la courbe $x^2y + xy^2 = 6$. Vérifier que $(1, 2)$ est sur la courbe, puis trouver l'équation de la tangente en ce point.