**La piste infernale:**

Une tortue s'élance un matin sur une piste de 10 mètres de long.

Elle parcourt 1 m à chacune des journées, et se repose la nuit.

Mais cette piste infernale s'étire de 10 m (de façon uniforme, comme un élastique) pendant la nuit.

La tortue arrivera- t-elle au bout de la piste? Et si oui au bout de combien de jours?

**La tortue harmonique**

$d\_{i} $: La distance totale faite au jour $i$

$l\_{i} $: La longueur de la piste au jour $i$, on sait que $l\_{i}=10i$

$p\_{i} $: La proportion de la piste qui est derrière la tortue au jour $i$, on sait que $p\_{i}=\frac{d\_{i}}{l\_{i}}=\frac{d\_{i}}{10i}$

$a\_{i} $: La proportion qui est ajoutée au jour $i$

Cette justement de cet ajout que l’on veut discourir…

On veut montrer que $a\_{1}+a\_{2}+a\_{3}+…+a\_{n}=1$ à condition que $n$ soit suffisamment grand.

**MAIS POURQUOI** $a\_{1}=\frac{1}{10}$ **,** $a\_{2}=\frac{1}{20}$ **,** $a\_{3}=\frac{1}{30}$ **et** $a\_{i}=\frac{1}{10i}$ **SI SIMPLEMENT ?**

Au début, nous avons ceci…

$d\_{1}=1$ mètre $d\_{2}=3$ mètres $d\_{3}=5,5$ mètres

$ l\_{1} =10$ mètres $l\_{2} =20$ mètres $l\_{3} =30$ mètres

$p\_{1}=\frac{1}{10} $ $p\_{2}=\frac{3}{20} $ $p\_{3}=\frac{5,5}{30}=\frac{11}{60} $

$a\_{1}=\frac{1}{10}-0=\frac{1}{10}$ $a\_{2}=\frac{3}{20}-\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$ $a\_{3}=\frac{11}{60}-\frac{3}{20}=\frac{1}{30}$

Pour l’instant, on voit que $a\_{1}=\frac{1}{10}$ , $a\_{2}=\frac{1}{20}$ et $a\_{3}=\frac{1}{30}$

**POURQUOI** $a\_{i}=\frac{1}{10i}$ **?**

**Pour trouver** $d\_{i}$

On prend l’ancienne distance, $d\_{i-1}$

On ajoute ensuite le rapport entre cette ancienne distance et l’ancienne longueur, amené sur 10, cela donne

$$\frac{d\_{i-1}}{l\_{i-1}}×10$$

On ajoute finalement 1 mètre

On a donc $d\_{i}=d\_{i-1}+\frac{d\_{i-1}}{l\_{i-1}}×10+1$

Simplifions…

En partant, $l\_{i-1}$ n’est pas chic puisque c’est la même chose que $l\_{i}-10$ ou bien $10i-10$

Juste pour être encore mieux placés pour la suite, on utilisera l’expression $10\left(i-1\right)$

On a donc $d\_{i}=d\_{i-1}+\frac{d\_{i-1}}{10(i-1)}×10+1$

… et les $10$ vont s’annuler : $d\_{i}=d\_{i-1}+\frac{d\_{i-1}}{(i-1)}+1$

Allons chercher le même dénominateur : $d\_{i}=\frac{(i-1)d\_{i-1}}{(i-1)}+\frac{d\_{i-1}}{(i-1)}+\frac{(i-1)}{(i-1)}$

On simplifie : $d\_{i}=\frac{\left(i-1\right)d\_{i-1}+d\_{i-1}+(i-1)}{(i-1)}$

Avec une mise en évidence des deux premiers termes : $d\_{i}=\frac{\left(i-1+1\right)d\_{i-1}+(i-1)}{(i-1)}$

Mieux : $d\_{i}=\frac{i×d\_{i-1}+(i-1)}{(i-1)}$

**Pour trouver** $p\_{i}$

On divise $d\_{i}$ par $l\_{i} $: $p\_{i}=\frac{i×d\_{i-1}+(i-1)}{(i-1)}÷l\_{i}$

Ou encore : $p\_{i}=\frac{i×d\_{i-1}+(i-1)}{(i-1)}÷10i$

**Pour trouver ENFIN** $a\_{i}$

On soustrait l’ancienne proportion faite, $p\_{i-1}=\frac{d\_{i-1}}{l\_{i-1}}$ de la nouvelle, $p\_{i}=\frac{d\_{i}}{l\_{i}}$

Cela donne

$$a\_{i}=p\_{i}-p\_{i-1}=\left[\frac{i×d\_{i-1}+\left(i-1\right)}{\left(i-1\right)}÷10i\right]-\left[\frac{d\_{i-1}}{l\_{i-1}}\right]$$

Or, on sait que $l\_{i-1}=10(i-1)$ et donc

$$a\_{i}=p\_{i}-p\_{i-1}=\left[\frac{i×d\_{i-1}+\left(i-1\right)}{\left(i-1\right)}÷10i\right]-\left[\frac{d\_{i-1}}{10(i-1) }\right]$$

**Algèbre**

$$a\_{i}=\left[\frac{i×d\_{i-1}+\left(i-1\right)}{\left(i-1\right)}÷10i\right]-\left[\frac{d\_{i-1}}{10(i-1) }\right]$$

$$a\_{i}=\frac{\frac{i×d\_{i-1}+\left(i-1\right)}{\left(i-1\right)}}{10i}-\frac{d\_{i-1}}{10(i-1)}$$

$$a\_{i}=\frac{\frac{i×d\_{i-1}+\left(i-1\right)}{\left(i-1\right)}}{10i}-\frac{\frac{d\_{i-1}×10i}{10(i-1)}}{10i}$$

$$a\_{i}=\frac{\frac{i×d\_{i-1}+\left(i-1\right)}{\left(i-1\right)}}{10i}-\frac{\frac{d\_{i-1}×i}{(i-1)}}{10i}$$

$$a\_{i}=\frac{\frac{i×d\_{i-1}+\left(i-1\right)}{\left(i-1\right)}-\frac{d\_{i-1}×i}{(i-1)}}{10i}$$

$$a\_{i}=\frac{\frac{i×d\_{i-1}+\left(i-1\right)-d\_{i-1}×i}{\left(i-1\right)}}{10i}$$

$$a\_{i}=\frac{\frac{\left(i-1\right)}{\left(i-1\right)}}{10i}$$

$$a\_{i}=\frac{1}{10i}$$

Voilà pourquoi $a\_{i}=\frac{1}{10i}$ !!